32

Uma introdução ao método das diferenças finitas: condução de calor

- Neylan Leal **Dias**
- Guilherme Augusto Souza da **Luz**
- Eduardo Conceição **Rosario**
- Simone de Almeida Delphim **Leal**

UNIFAP

doi 10.37885/201102333

RESUMO

Este estudo apresenta a modelagem do fenômeno condução de calor através da modelagem matemática e computacional. Para isso serão apresentadas as equações que governam o fenômeno e também o método das diferenças finitas. O método numérico utilizado será apresentado desde sua formulação até a aplicação em um problema ilustrativo resolvido com o uso de simulação computacional através do MatLab.

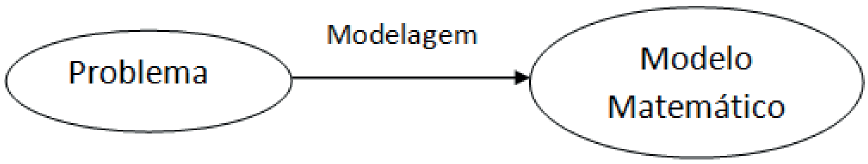
Palavras-chave: Diferenças Finitas, Condução de Calor, Método Explícito, Método Implícito.

INTRODUÇÃO

A transferência de calor é um fenômeno de ganho ou perda de energia térmica por contato direto com a fonte de calor. Este processo ocorre em incêndios florestais, principalmente no aquecimento de massas de ar que devido ao processo de condução, possui grande relevância no controle de incêndios (FORMAS, 2020). O estudo de cenários hipotéticos em conjunto com modelos matemáticos e simulações computacionais são essenciais para compreender como ocorrem fenômenos como incêndios florestais, e planejar estratégias de controle.

O processo de modelagem pode ser visto como um processo composto por passos simples, como representado na figura 1, onde a partir de um problema escolhido, inicia-se a modelagem, através da seleção dos dados, por meio de simplificação e formulação de hipóteses, de modo a manter as características do problema, chegando assim no modelo matemático ideal.

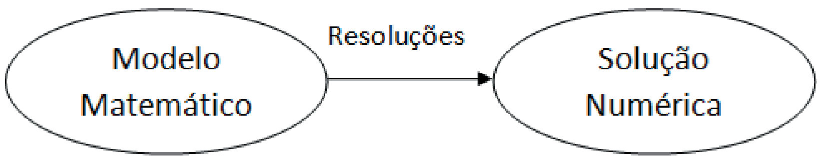
Figura 1. Processo de modelagem matemática



Fonte: Autor

O uso de equações diferencias em modelagem matemática é bastante difundido em diversos campos da ciência, pelo fato de descrever matematicamente diversos processos, tais como físicos, químicos, biológicos e etc. No entanto a resolução de algumas equações diferenciais, em especiais as equações diferenciais parciais nem sempre possuem solução analítica, o que requer uma o uso de solução aproximada. Estas soluções aproximadas obtidas através da utilização de métodos numéricos, como o que iremos estudar chamado de Método das Diferenças Finitas (MDF).

Figura 2. Processo de modelagem matemática



Fonte: Autor

No Método das Diferenças Finitas o domínio do problema, contínuo, é substituído por uma série de pontos discretos, ou nós, nos quais são calculadas as incógnitas do problema. Essa substituição do contínuo pelo discreto denomina-se discretização (CUMINATO & MENEGUETTE, 2013).

Uma vez efetuada a discretização do domínio do problema, aplica-se o MDF para a determinação das incógnitas. As derivadas, que aparecem na equação original, são substituídas (ou aproximadas) por fórmulas discretas de diferenças. A aplicação dessas fórmulas aos pontos do domínio discretizado gera um sistema de equações algébricas, cuja solução fornece os valores das incógnitas do problema nesses pontos discretos (CUMINATO & MENEGUETTE, 2013).

O Método das Diferenças Finitas tem enumeras aplicações, principalmente na engenharia, para resolver numericamente problemas que envolvem equações diferenciais parciais com valores de contorno, estes mesmos aparecem recorrentemente no trabalho dos engenheiros, como a Equação de Deflexão de Vigas, Equações de Águas Rasas e etc.

METODOLOGIA

Para resolver numericamente esses problemas, vamos deduzir as fórmulas de diferenças finitas, a partir delas conseguiremos fazer as aproximações para solução de equações diferenciais, recordando que um desenvolvimento em série de Taylor de uma função $y(x)$ pode ser escrito como (ZILL & CULLEN, 2001):

$$y(x+h) = y(x) + y'(x)h + y''(x)\frac{h^2}{2} + y'''(x)\frac{h^3}{6} + ... \qquad (1)$$

$$y(x-h) = y(x) - y'(x)h + y''(x)\frac{h^2}{2} - y'''(x)\frac{h^3}{6} + ... \qquad (2)$$

Para começar, vamos precisar da definição de erro de truncamento e erro de truncamento local.

Definição: Erros de Truncamento surgem quando aproximamos um conceito matemático formado por uma sequência infinita de passos por um de procedimento finito.

Definição: O erro de truncamento local (ETL) é definido como o erro introduzido em cada passo pelo truncamento da equação diferencial supondo conhecida a solução exata no início do intervalo.

O primeiro passo é isolar $y'(x)$ na (1), temos:

$$y'(x) = \frac{1}{h}[y(x) - y(x-h)] + [y''(x)\frac{h^2}{2} - y'''(x)\frac{h^3}{6} - ...] \quad (5)$$

$$ETL = [y''(x)\frac{h^2}{2} - y'''(x)\frac{h^3}{6} - ...]$$

Logo, podemos escrever a $y'(x)$ da seguinte forma:

$$y'(x) = \frac{1}{h}[y(x) - y(x-h)] + O(h) \quad (6)$$

A equação (6) conhecida como fórmula de diferença retrógrada não é a única. Existem outras fórmulas de diferenças que podem ser deduzidas a partir da mesma ideia adotada, usando séries de Taylor.

A partir das fórmulas de diferenças finitas que acabamos de deduzir, é possível fazer a discretização do domínio de quase todo problema de valor de contorno, mas antes disso, considerando $y_i = y(x_i)$, com i = 0, 1, 2, ... n, temos:

$$y_i' \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \text{ diferença avançada}$$

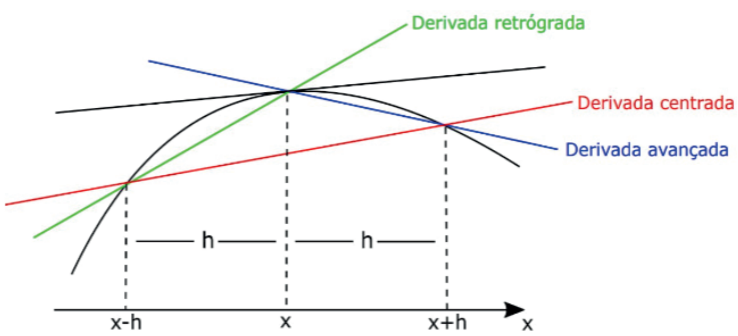
$$y_i' \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \text{ diferença retrógrada}$$

$$y_i' \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \text{ diferença centrada}$$

$$y_i'' \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \text{ diferença centrada}$$

Com a nova notação, chamamos essas equações de fórmulas discretas. Graficamente é possível notar o que está acontecendo no problema, observe na figura 1.

Figura 3. Representação das derivadas aproximadas.



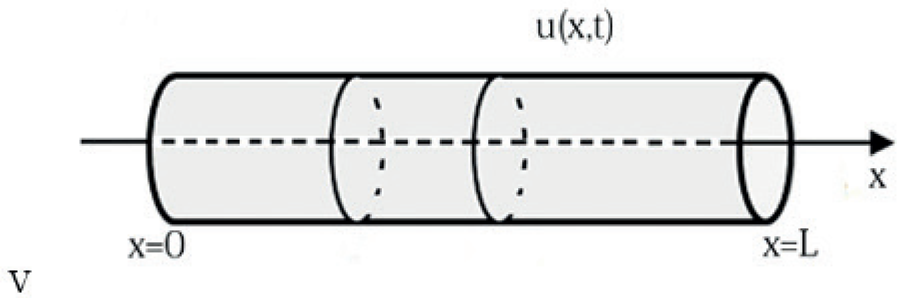
Fonte: Autor.

Uma das aplicações mais clássicas de diferenças finitas é na Equação do Calor, que descreve a distribuição de temperatura em uma barra, a partir daí surge enumeras teorias e diferentes métodos a serem estudados como verão a seguir.

Equação do Calor

Vamos considerar um problema de condução de calor em uma barra de seção reta uniforme feita com material homogêneo, como na Figura (4). Escolha o eixo dos x de modo a formar o eixo da barra e suponha que x=0 e x=L correspondem as extremidades da barra.

Figura 4. Barra uniforme.



Fonte: Autor.

Suponha, ainda, que os lados da barra estão perfeitamente isolados, de modo que não a transmissão de calor ai. Podemos supor, também, que as dimensões da seção reta são tão pequenas que a temperatura u pode ser considerada constante em qualquer seção reta. Então, u só depende da coordenada axial x e do instante t (BOYCE & DIPRIMA, 2009).

A equação que modela o problema é a equação diferencial parcial parabólica, dada por:

$$\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \tag{7}$$

Ou seja, esse modelo, modela a difusão de calor no espaço ao longo do tempo t , em que $u = u(x,t)$ é a temperatura no ponto $x \in \mathbb{R}$ e no instante $t \geq 0$, α^2 é o coeficiente de difusão térmica, no caso de meio homogêneo (SERRANHO, 2017).

A equação do calor pode apresentar condições de contorno:

$$\begin{aligned}
&\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \\
&u(0,t) = T_1, \quad u(L,t) = T_2, \quad t > 0 \\
&u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < L
\end{aligned}$$

Discretização da Equação do Calor

Agora iremos observar duas maneiras de resolver numericamente a equação do calor, pelo método explícito e implícito de diferenças finitas, observando o comportamento de cada solução e suas peculiaridades. Como feito em (CUMINATO & MENEGUETTE, 2013).

Método Explícito

Para resolver numericamente a Equação do Calor vamos usar diferenças finitas, mais especificamente o método explícito de diferenças finitas, pois, vamos utilizar o derivada avançada no tempo e a de segunda ordem centrada no espaço.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} \text{ Centrada}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{k} \text{ Avançada}$$

Observe que aconteceu uma adaptação para duas variáveis, para auxiliar nos cálculos. Agora substituindo as derivadas parciais, pelas aproximações apresentadas, temos:

$$\alpha[\frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2}] = \frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{k}$$

Fazendo$\lambda = \alpha k/h^2$, temos que

$$u_{i,j+1} = \lambda u_{i+1,j} + (1 - 2\lambda)u_{ij} + \lambda u_{i-1,j} \tag{8}$$

Alguns dados gerais a serem considerados para resolver o problema proposto:

$$h = \frac{a}{n} \quad \text{e} \quad k = \frac{t}{m}$$

$$x_i = ih, \quad i = 0, 1, 2, ..., n$$

$$t_j = jk, \quad j = 0, 1, 2, ..., m$$

Método Implícito

Outra variação que temos para diferenças finitas é o método implícito, onde utilizaremos a derivada retrógrada no tempo e a de segunda ordem centrada no espaço, ou seja.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} \text{ Centrada}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_{ij} - u_{i,j-1}}{k} \text{ Avançada}$$

$$\alpha[\frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2}] = \frac{u_{ij} - u_{i,j-1}}{k}$$

Fazendo$\lambda = \alpha k/h^2$, temos que

$$u_{i,j-1} = -\lambda u_{i+1,j} + (1+2\lambda)u_{ij} - \lambda u_{i-1,j} \tag{9}$$

A seguir faremos uma aplicação do método explícito e implícito em um problema de difusão de calor onde ira ser comparado a solução de cada método.

Aplicação

Uma barra alumínio com 6 cm de comprimento e dimensões desprezíveis em relação ao eixo y e z, foi isolada termicamente em ambos os lados de modo a não trocar calor com o ambiente externo. Inicialmente, essa barra foi mantida a uma temperatura constante de 10 graus celcius e suas extremidades foram mantidas a 0 graus Celsius para o tempo, $t > 0$. Sabe-se que a difusividade térmica para o alumínio é dada por $\alpha = 1cm^2/s$. Para encontrar a temperatura $u(x,t)$ em qualquer instante de tempo e espaço da barra, utilizaremos o método das diferenças finitas (MELO, 2011).

Solução: Para modelar e resolver o problema usaremos o método explícito e implícito de diferenças finitas na equação do calor, isto é

$$\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < 6, \quad 0 < t < 2$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(10,t) = 0, \quad 0 < t < 2$$

$$u(x,0) = 10, \quad 0 < x < 6$$

Para efetuar a discretização, vamos considerar $t = 2, \; n = 6, \; m = 5,$ a derivada avançada e retrógrada no tempo e a derivada de segunda ordem centrada no espaço, logo temos a equação do calor discretizada de duas formas.

$$u_{i,j+1} = 0,4u_{i+1,j} + (1 - 2.0,4)u_{ij} + 0,4u_{i-1,j} \tag{10}$$

$$u_{i,j-1} = -0,4u_{i+1,j} + (1 + 2.0,4)u_{ij} - 0,4u_{i-1,j} \tag{11}$$

Explícito e implícito, com $i = 1, 2, ..., n - 1$ e $j = 1, 2, ..., m - 1$, respectivamente.

DISCUSSÃO E RESULTADOS

A solução do problema será dada por um sistema linear que é obtido quando os valores de i e j variam nas equações. Cujos resultados apresentados nas Tabela 1 e Tabela 2 foram gerados no MatLab.

Tabela 1. Método Explícito

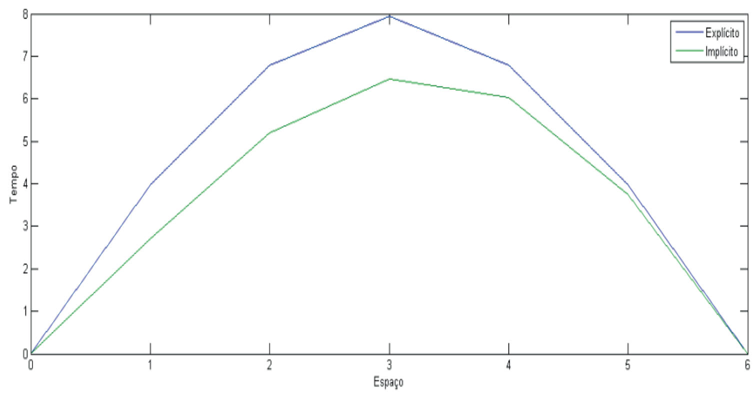
Pontos sobre a barra (I)	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$
0	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
1	10.00000	6.00000	5.20000	4.40000	3.98400	3.51680
2	10.00000	10.00000	8.40000	7.76000	6.80000	6.13440
3	10.00000	10.00000	10.00000	8.72000	7.95200	7.03040
4	10.00000	10.00000	8.40000	7.76000	6.80000	6.13440
5	10.00000	6.00000	5.20000	4.40000	3.98400	3.51680
6	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

Tabela 2. Método Implícito

Pontos sobre a barra (I)	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$
0	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
1	1.78807	2.54003	2.79809	2.81721	2.72034	2.56859
2	8.04630	6.95999	6.24133	5.68220	5.19849	4.75781
3	9.42029	8.66415	7.88791	7.14940	6.46736	5.84533
4	9.34500	8.47795	7.59391	6.77030	6.03114	5.37776
5	7.63222	6.12411	5.08982	4.33219	3.74703	3.27674
6	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

A Figura 2 a seguir apresenta em azul a solução da equação do calor pelo método explícito e em laranja o método implícito. O eixo x representa a barra e o eixo y o tempo.

Figura 2. Resultado gráfico dos métodos implícito e explicito.



Através deste estudo foi possível verificar que sob determinadas condições o método das diferenças finitas apresenta boas aproximações possibilitando que este pode ser aplicado em situações mais complexas, como eventos da natureza. Apesar de ser uma pesquisa com conceitos introdutórios, estudos como esses são importantes, pois colaboram para o desenvolvimento da ciência aplicada, e deixa em evidencia ferramentas pouco disseminadas em meio a problemas importantes que envolvem a propagação de incêndios, em especial os que ocorrem por condução e por irradiação através do ar com os devidos ajustes.

REFERÊNCIAS

1. ALVES, L.M. Introdução aos Métodos Aproximados em Engenharia, Universidade Federal do Paraná, (2007).

2. BOYCE, W.E. & DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno, (2009).

3. CUMINATO, J.A. & MENEGUETTE, M. Jr. Discretização de Equações Diferenciais Parciais: Técnicas de Diferenças Finitas, (2013).

4. FORMAS de propagação. UFRRJ, Rio de Janeiro, 25 de Nov. de 2020. Disponível em: <www.ufrrj.br/institutos/it/de/acidentes/propag>. Acesso em 25 de Nov. de 2020.

5. MELO, J.K.M. Aplicação do Método das Diferenças Finitas Explícito na Solução da Equação do Calor para o Caso Transiente e Unidimensional, Monografia apresentada a Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Campos Angicos, Ufersa, (2011).

6. SERRANHO, P. Matemática Aplicada e Análise Numérica: Uma Introdução com Octave, Universidade Aberta, (2017).

7. ZILL, D.G. & CULLEN, M.R. Equações diferenciais-vol2, (2001)