INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO AMAPÁ
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
CAMPUS MACAPÁ

BENEDITO SILVA DA LUZ
THIAGO COSTA DA SILVA

Teoria dos Grafos: uma abordagem sobre o problema das quatro cores com alunos do 2° ano do Ensino Médio do Instituto Federal do Amapá

MACAPÁ
2022

BENEDITO SILVA DA LUZ
THIAGO COSTA DA SILVA

Teoria dos grafos: uma abordagem sobre o problema das quatro cores com alunos do 2° ano do Ensino Médio do Instituto Federal do Amapá

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à coordenação do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amapá, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Helington Franzotti Araujo de Souza.

MACAPÁ
2022

Biblioteca Institucional - IFAP
Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

L979t Luz, Benedito Silva da
Teoria dos Grafos: uma abordagem sobre o Problema das Quatro Cores com alunos do 2° ano do Ensino Médio do Instituto Federal do Amapá / Benedito Silva da Luz, Thiago costa da Silva. - Macapá, 2023.
51 f.: il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) -- Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amapá, Campus Macapá, Curso de Licenciatura em Matemática, 2023.

Orientador: Me. Helington Franzotti Araujo de Souza.

1. Teoria dos Grafos. 2. Teorema das Quatro Cores. 3. Coloração de Grafos. I. Silva, Thiago costa da. I. Souza, Me. Helington Franzotti Araujo de, orient. II. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica do IFAP com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

BENEDITO SILVA DA LUZ
THIAGO COSTA DA SILVA

Teoria dos grafos: uma abordagem sobre o problema das quatro cores com alunos do 2° ano do Ensino Médio do Instituto Federal do Amapá

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à coordenação do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amapá, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Helington Franzotti Araujo de Souza.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
HELINGTON FRANZOTTI ARAUJO DE SOUZA
Data: 29/08/2023 01:18:27-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Me. Helington Franzotti Araújo de Souza
(Orientador) Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amapá

Documento assinado digitalmente
FRANCIELCK DOMINGOS FREIRE
Data: 29/08/2023 21:48:06-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Me. Francielck Domingos Freire (Membro interno)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do

Documento assinado digitalmente
EDUARDO DA CONCEICAO ROSARIO
Data: 02/09/2023 22:32:04-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Me. Eduardo da Conceição Rosário (Membro externo) Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amapá

Apresentado em: 20 /06 / 23

Conceito/Nota: 93,75

AGRADECIMENTOS

Agradecemos às nossas famílias, pelo incentivo e motivação constante para ampliar nossos conhecimentos e buscar nossos sonhos e objetivos por mais difíceis que possam ser.

A todos os nossos professores, que nos incentivaram, apoiaram e estiveram sempre prontos a sanar nossas dúvidas e nos orientar.

Um agradecimento especial ao atencioso e paciente orientador e mestre Prof. Helington Franzotti, pelo privilégio de sua importante orientação, possibilitando a conclusão deste trabalho. Seremos sempre gratos por ter nos orientado, se fazendo sempre presente, mesmo estando distante.

E principalmente Agradecemos a Deus por ter sempre nos iluminado, fortalecido, guiado e nos amparando nos momentos difíceis e nunca ter nos deixado desistir.

"Tornar o simples em complicado é fácil, tornar o complicado em simples é criatividade."

(Charles Mingus).

RESUMO

O presente trabalho aborda o tema Teoria dos Grafos, onde se apontam as definições básicas, teoremas fundamentais e importantes para compreensão do tema, além dos problemas mais famosos que se destacaram no decorrer da história de maneira sucinta, sendo eles: O problema das sete pontes de Königsberg que trata da questão de atravessar determinadas sete pontes sem repetir uma única vez a passagem por elas. Muitas pessoas tentaram achar uma solução para este problema, mas foi Leonhard Euler que deu uma resposta para este desafio. O Teorema das Quatro Cores, apontando desde a sua origem, teoremas e os principais matemáticos que ajudaram no seu estudo. Inicialmente o problema das quatro cores iniciado com o matemático Francis Guthrie, estudado por Alfred Bray Kempe sua refutação através do contraexemplo de Percy John Heawood, que deu continuidade na demonstração do Teorema das Cinco Cores de Percy John Heawood. Foram aplicadas oficinas sobre a temática com alunos do Ensino Médio do IFAP e, após uma explanação das ideias iniciais da teoria, foram propostos alguns problemas para os participantes. Os resultados indicam que abordar temas diferenciados, que não exigem grandes pré-requisitos para seu entendimento, como a Teoria dos Grafos, aliados ao uso de softwares de matemática dinâmica, como o Geogebra, potencializa e dinamiza a aula, além de motivar o aluno no processo de ensino-aprendizagem da matemática.

Palavras-chave: teorema das quatro cores; teorema das cinco cores; teoria dos grafos.

ABSTRACT

The present work addresses the theme of graph theory, where the basic definitions, fundamental and important theorems for understanding the theme will be pointed out, in addition to the most famous problems that have stood out in the course of history in a succinct way, namely: The problem of the seven bridges of Königsberg which is the question of crossing certain seven bridges without repeating the passage through them once. Many people have tried to find a solution to this problem, but it was Leonard Euler who gave an answer to this challenge. The Four Colors Theorem, pointing from its origin, theorems and the main mathematicians who helped in the development of the four colors problem. Initially the problem of four colors started with the mathematician Francis Guthrie, studied by Alfred Bray Kemp and its refutation through the counterexample of Percy John Heawood. Which continued the proof of Percy John Heawood's Five Colors Theorem. Workshops on the subject were applied with IFAP High School students and, after an explanation of the initial ideas of the theory, some problems were proposed for the participants. The results indicate that addressing different topics, which do not require major prerequisites for their understanding, such as Graph Theory, combined with the use of dynamic mathematics software, such as Geogebra, enhances and streamlines the class, in addition to motivating the student in mathematics teaching-learning process.

Keywords: four colors theorem; five colors theorem; graph theory.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Teoria dos Grafos está presente e faz parte do cotidiano bem mais do que se imagina. Ao utilizar as redes sociais e interagir com algum conteúdo ou pessoa, cada usuário forma um grafo com as interações que são estabelecidas com outros usuários e conteúdos que possam ter em comum. Por exemplo, escolher o meio de transporte pelo qual uma encomenda será entregue, e até mesmo ao observar o céu e as estrelas e constelações, pode-se fazer relações com a Teoria dos Grafos. Este tema tem uma origem muito recente na história da matemática se comparado com outros.

Seu início remonta ao século XX, possuindo grande importância ao relacionar-se não só com a matemática mas também com diversas outras áreas da ciência, como a química, a física e a computação. Pode-se dizer que ela surgiu a partir do questionamento de moradores sobre as pontes da cidade de Königsburg, na Rússia. O famoso problema das pontes de Königsburg foi resolvido por Leonhard Euler[1] (1707-1783) um dos mais importantes matemáticos da história, podendo ser considerado o matemático mais produtivo do século XVIII.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo geral

- Apresentar uma abordagem introdutória sobre a Teoria dos Grafos e algumas de suas aplicações.

1.2.2 Objetivos específicos

- Fazer uma abordagem histórica sobre a Teoria dos Grafos;
- Apresentar definições e propriedades sobre os grafos e alguns problemas clássicos;
- Aplicar uma atividade relacionada aos grafos com alunos do 2º Ano do Ensino Médio do Instituto Federal do Amapá.

[1] Leonhard Euler foi um importante matemático suíço, nascido na cidade de Basileia em 1707. Euler deu grandes contribuições para a matemática, em áreas como cálculo, trigonometria é um dos precursores da Teoria dos Grafos.

1.2 Justificativa

A importância deste trabalho remete a necessidade de associar a análise combinatória e teoria dos grafos, de tal modo que possa contribuir como um importante tema para a educação básica, buscando a valorização de instrumentos matemáticos utilizados para a resolução de problemas clássicos.

Entretanto, cabe esclarecer que a Teoria dos Grafos tem um caminho que atende aos objetivos propostos na BNCC, estimula a percepção do aluno a respeito da Análise Combinatória e conta com a vantagem de não necessitar de muitos pré-requisitos. Apesar do presente trabalho ser voltado para salas de aula do ensino médio, destaca-se que, justamente por não exigir conhecimentos matemáticos específicos e com a orientação de que o pensamento combinatório já seja introduzido antes do ensino médio, a Teoria dos Grafos poderia ser trabalhada ainda no ensino fundamental. Contudo a teoria dos grafos podem ser classificados como uma vertente ou ramo da Análise Combinatória, cujo foco está no estudo de como os objetos se relacionam dentro de um conjunto. Sobre a relevância e importância de abordar a Teoria dos Grafos no ensino básico, Mesquita (2021, p. 11 - 12) ressalta que

> A Teoria dos Grafos é um dos ramos da matemática que obteve avanços relativamente recentes e que dão a essa teoria destaques contemporâneos. Sua aplicação está presente em diversos campos de estudo, como na física com aplicação em resistores, na química com o interesse em moléculas de hidrocarbonetos e níveis de energia, na biologia com foco na cadeia alimentar, na economia com métodos para crescimento populacional, rotas de tráfego aéreo, modelos de menor caminho percorrido, modelos de contagem. Aparece também em tópicos da matemática pura e aplicada, o que demonstra sua importância no ensino e aprendizagem nos dias de hoje.

Corroborando com esta necessidade, a autora menciona o fato de que a BNCC enfatiza que

> é competência geral na educação básica exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular, resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas. (MESQUITA, 2021, p. 11)

Nesse sentido, ela se apresenta como um conteúdo relevante, mas que poucas vezes é trabalhado em sala de aula com os alunos durante o ano letivo. Corroborando com esta ideia, Gouvêa (2020, p. 2) menciona que “Desse modo, vemos na Teoria dos Grafos um caminho interessante que atende aos objetivos da BNCC, muda a percepção do aluno sobre a Análise Combinatória ainda conta com a vantagem não necessita de pré requisitos.

2 CONTEXTO HISTÓRICO

Neste capítulo, será feita uma breve revisão histórica do Problema das Sete Pontes de Königsberg, cuja solução proposta por Leonhard Euler deu origem à Teoria dos Grafos. Inicialmente, será descrito o Problema das Sete Pontes, considerado um dos problemas mais reconhecidos e relevantes que contribuíram para o estabelecimento e consolidação da Teoria dos Grafos até os dias atuais. Posteriormente, será discutido o Problema das Quatro Cores. Ambos os problemas desempenham um papel importante na compreensão dos conceitos e princípios fundamentais subjacentes à Teoria dos Grafos. Na Figura 1, tem uma pintura a óleo de Euler feita por Johann Georg. (MESQUITA, 2021, p. 16).

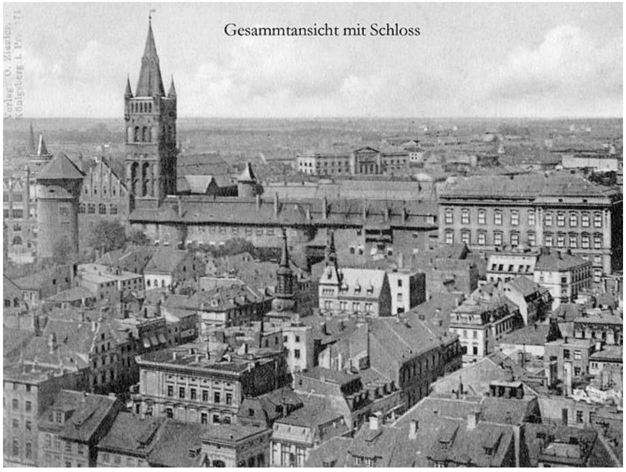
Figura 1- Leonhard Euler.

Fonte: Mesquita, 2021.

2.1 O problema das sete pontes de Konigsberg

Localizada no norte da Europa, na costa do Báltico, Königsberg, agora chamada Kaliningrado, era uma importante cidade da Rússia que, para muitos, é o berço da criação da Teoria dos Grafos. Esta cidade-estado tinha duas ilhas junto ao rio Pregel, e naquela época seis pontes ligavam as duas ilhas uma à outra (MESQUITA, 2021, p. 15). Na Figura 2, tem-se uma imagem da referida cidade.

Figura 2 - Cidade Königsberg.

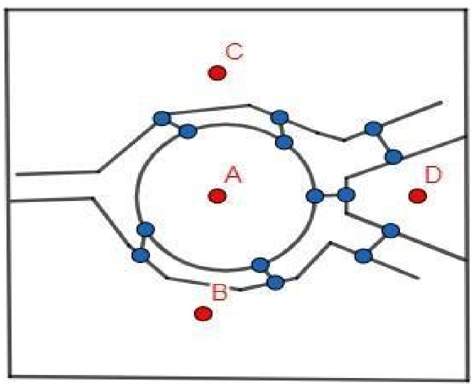


Fonte: Dr Husen, 1907.

Para conhecer os fundamentos da teoria das sete pontes de Königsberg precisa-se destacar o matemático Leonard Euler (1707-1783). Criador da Teoria dos Grafos, foi o responsável em determinar os estudos sobre a resolução dos problemas das sete pontes.

Em que consiste o problema das sete pontes Königsberg? O problema teve início em uma ilha denominada Königsberg, o que levou os moradores locais a se questionarem sobre a possibilidade de chegar a todas as partes dessa ilha sem passar mais de uma vez por uma mesma ponte, uma vez que a ilha era dividida por um rio. As partes dessa ilha foram representadas por Leonard Euler com as letras A, B, C e D, conforme mostra a Figura 2 a seguir.

Figura 3 - Representação das sete pontes de Königsberg.

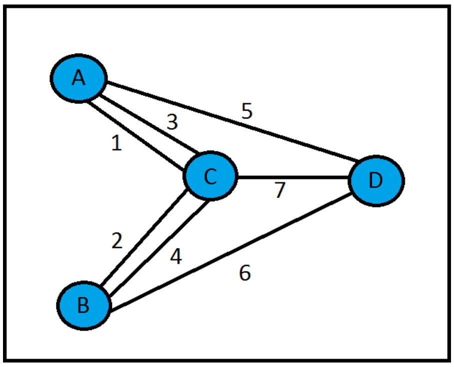


Fonte: Os autores, 2022.

O problema consistia em atravessar as pontes sem repetir a passagem por elas, o que levou muitas pessoas a se preocuparem com as sequências de cada percurso das pontes com a finalidade de encontrar um caminho que permitisse passar pelas sete pontes e chegar aos quatro terrenos da ilha sem repetir uma única ponte. No entanto, Leonard Euler não se preocupava com essa sequência, pois não considerava essa característica como prioritária em sua abordagem.

A estratégia de Euler o levou a pensar que, para atravessar de uma ilha para outra, seria necessário utilizar-se duas pontes, uma de entrada e outra de saída das regiões. Cada ilha, que ele chamou de “vértice”, deveria ter um número par de pontes, que ele chamou de “arestas”. Euler mostrou que não era possível fazer o trajeto sem passar mais de uma vez pelas pontes, devido às pontes de Königsberg possuírem alguns dos seus vértices com grau ímpar, ou seja, havia um número ímpar de pontes ligando algumas regiões. Mais à frente no texto será abordado o conceito de grau de um vértice.

Figura 4 - Representação das sete pontes de Königsberg como vértices e arestas.



Fonte: Os autores, 2022.

2.2 O problema das quatro cores

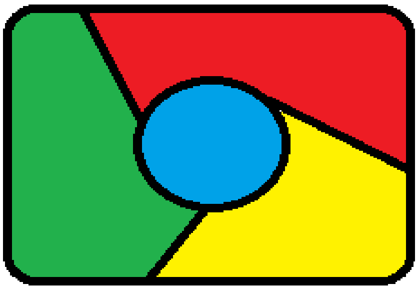
O Problema das Quatro Cores foi proposto em 1852 na Inglaterra por Francis Guthrie (1831-1899), um matemático recém-formado. Enquanto pintava um mapa dos condados da Inglaterra, Guthrie começou a usar cores diferentes para os condados vizinhos, a fim de melhor diferencia-los visualmente. Ele percebeu que era possivel pintar o mapa utilizando apenas quatro cores, desde que cada região pintada com cores diferentes fosse facilmente distinguível, essa observação deu origem ao seguinte questionamento: **seria possível pintar qualquer mapa plano utilizando apenas quatro cores distintas?**

Guthrie tentou comprovar que sua hipótese estava certa, mas não conseguiu chegar a uma demonstração matemática para o fato. Com o passar do tempo, como ainda não tinha sido encontrada uma solução para o seu problema, ele passou o desafio de achar a solução para seu irmão, Frederick Guthrie (1833-1886), que era estudante de matemática. Frederick Guthrie, entretanto, também não teve êxito na tentativa de provar matematicamente o problema.

Foi Augustus De Morgan (1806-1871), um matemático britânico e pesquisador da lógica, que finalmente se encaminhou para uma possível solução. De Morgan percebeu que em alguns mapas havia quatro países que faziam fronteiras com outros três países. Sendo assim, não seria possível pintar tal mapa, usando somente três cores distintas, sempre respeitando a característica de que cada país vizinho não seja pintado com a mesma cor.

Apesar de Augustus De Morgan não ter resolvido o problema definitivamente, ele é conhecido por ser responsável pela divulgação da conjectura de Francis Guthrie. De Morgan levava estas questões para sala de aula e mostrava para seus alunos, na tentativa de que algum deles pudesse resolvê-lo.

Figura 5- Exemplo de mapa que não é possível pintar com menos de quatro cores.



Fonte: Os autores, 2022.

Um exemplo prático de um mapa que não pode ser pintado com menos de quatro cores sem que haja países vizinhos pintados com a mesma cor é o mapa da América do Sul (Figura 6), onde quatro países fazem fronteiras, cada um com outros três, são eles: Brasil, Paraguai, Argentina e Bolívia. Tais mapas são chamados de mapas tetracromáticos.

Figura 6 - Mostra o mapa tetracromático dos países citados acima.

Fonte: Os autores, 2022.

O Problema das Quatro Cores ganhou ampla notoriedade na época e, após 26 anos de sua formulação por Francis Guthrie, em 1878 foi publicado um artigo pela London Mathematical Society. A divulgação do problema se espalhou rapidamente e, em 1879 um renomado e conhecido advogado e membro da London Mathematical Society, Alfred Bray Kempe (1849-1922), publicou um artigo demonstrando que quatro cores seriam suficientes para se colorir qualquer mapa, garantindo que territórios vizinhos não fossem pintados com a mesma cor.

2.3 A demonstração de Kempe

Em 1879 Kempe publicou sua demonstração completa do teorema das quatro cores, afirmando que todo mapa poderia ser colorido utilizando apenas quatro cores. Essa ideia foi amplamente difundida ao longo do tempo, envolvendo diversos matemáticos renomados da época, os quais propuseram melhorias para a demonstração de Kempe.

Kempe começou sua demonstração afirmando que bastava provar a propriedade das quatro cores só para certos tipos de mapas, que Kempe chamava de mapas normais, que contém pelo menos um país com menos de seis países vizinhos. Ele afirmava que não existia mapa pentacromático pondo à prova as seguintes afirmações;

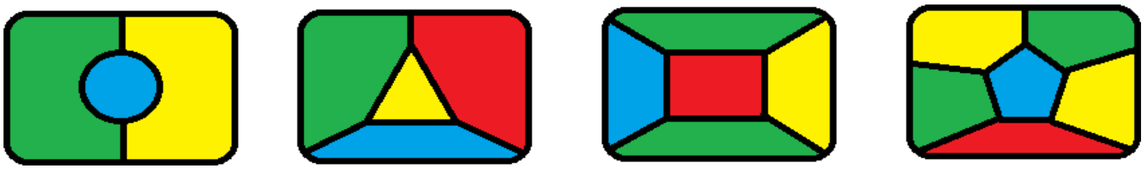
<u>*Afirmação 1*</u>: A existência de algum mapa pentacromático, faz com que haja também um mapa pentacromático normal.

<u>*Afirmação 2*</u>: A existência de um mapa pentacromático normal, faz com que haja também um mapa pentacromático normal mínimo.

<u>*Afirmação 3*</u>: A exemplo de um mapa normal, ele contém pelo menos um país com menos de seis países vizinhos.

<u>*Afirmação 4*</u>: Nenhum mapa que seja: Pentacromático normal e mínimo pode conter um país com menos de seis vizinhos.

Figura 7 - Mapas normais e seus vizinhos.



Fonte: Os autores, 2023.

Mais tarde, em 1890, o matemático Percy John Healwood provou que a demonstração de Kempe estava errada, fazendo uma demonstração analítica de que o número máximo de cores seria cinco, e não quatro. Depois de tanto impasse, o problema ressurge e em 1976 os matemáticos Kenneth Appel e Wolfgang Haken demonstraram que o número mínimo de cores necessárias para pintar qualquer mapa de forma que regiões adjacentes não sejam pintadas com a mesma cor não é maior do que quatro. (GOUVÊA, 2020, p. 30)

A demonstração de Kenneth Appel e Wolfgang Haken foi feita com o auxílio de um computador, tendo sido analisadas milhares de configurações dos grafos planares, correspondentes a todos os possíveis mapas, não havendo até hoje uma demonstração analítica para o teorema.

Inicialmente, houve uma certa recusa pela comunidade matemática do mundo em aceitar a prova como uma demonstração. Entretanto, mesmo sendo uma demonstração computacional, ela acabou sendo aceita na comunidade científica como válida. Nogueira (2015, p. 30) menciona que alguns anos mais tarde, outra demonstração foi feita, analisando - se um número reduzido de casos, mas ainda assim, foi necessário o uso de computadores para a prova. Isto gera uma questão filosófica, pois atualmente já existem programas que realizam demonstrações matemáticas e este fato tem tido certa resistência pelos matemáticos.

2.4 Os grafos atualmente

Atualmente, um dos exemplos mais comuns e que muitas pessoas conhecem são provavelmente as redes sociais, relacionamentos e entretenimento, tais como: Instagram, Facebook, Twitter, YouTube, TikTok, entre outras, pela forma com que as pessoas se relacionam, se conectam e como o algoritmo dessas redes sociais sugerem amigos, conhecidos e conteúdos que possam interessar ao usuário (Figura 8).

Figura 8 - Redes sociais.

Fonte: rawpixel.com, 2023.

Outro exemplo bem comum que pode ser associado ao conceito de grafos são as redes de transporte, incluindo as urbanas, rodoviárias, ferroviárias e aéreas. Essas redes desempenham um papel crucial na escolha do melhor meio de transporte para um determinado trajeto, levando em consideração critérios como velocidade, custo e eficiência. Isso contribui para o suprimento das necessidades de transporte de forma mais rápida e econômica. Na Figura 9, apresenta-se uma ilustração relacionada a esse tema.

Figura 9 - Redes de transporte

Fonte: Macrovector, 2022.

Várias outras aplicações podem ser exploradas utilizando a Teoria dos Grafos, como ligações químicas, algoritmos genéticos e problemas de análise combinatória. Além disso, conceitos de Álgebra Linear, como matrizes, também podem ser aplicados nesse contexto. No entanto é importante enfatizar que o objetivo deste trabalho não é abordar conceitos avançados com alunos do Ensino Médio, mas sim apresentar a Teoria dos Grafos de forma acessível e relevante para os estudantes nesse nível de ensino.

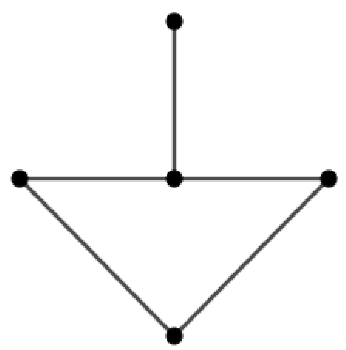
No próximo capítulo, serão apresentadas algumas definições básicas dos grafos e suas propriedades.

3 ELEMENTOS INTRODUTÓRIOS DA TEORIA DOS GRAFOS

3.1 Definições básicas

Os grafos[2] Podem ser classificados como uma vertente ou ramo da Análise Combinatória, cujo foco está no estudo de como os objetos se relacionam dentro de um conjunto. Os grafos não são como gráficos que mostram tendências, como por exemplo, um gráfico linear ou o gráfico de uma função. A definição de grafo mostra como coisas diferentes estão conectadas umas às outras. Diante disso, muitas situações podem ser convenientemente descritas por meio de diagramas constituídos por um conjunto de pontos e linhas que ligam alguns pares desses pontos (Ver Figura 10).

Figura 10 - Grafos Simples.



Fonte: Os autores, 2022.

Em outras palavras, um grafo é um diagrama simples composto de pontos que são ligados por linhas. De acordo com Gouvêa (2020, p. 11), "Um grafo é um par de conjuntos G=(V, E) em que V é um conjunto não vazio cujo os elementos são os vértices de G e E é um conjunto de arestas que conectam, cada uma, dois vértices".

Na Figura 10 tem-se a imagem de uma grafo de 5 pontos (ou nós) e 5 linhas (ou traços), como cada aresta conecta vértices distintos e duas arestas distintas não se cruzam ao mesmo par de vértices, então tem-se um grafo simples.

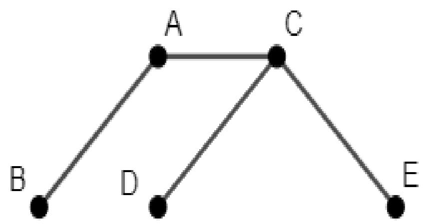
Esse conceito já foi abordado nas disciplinas de geometria, no estudo dos polígonos e poliedros em que as linhas são chamadas de arestas e os pontos são os vértices. Neste caso, as arestas correspondem a ligação entre dois vértices e um vértice é o ponto de intersecção de duas ou mais arestas, isto é, um encontro de linhas.

[2] A palavra¨grafo¨é um neologismo da palavra em inglês. Foi utilizada pela primeira vez pelo matemático inglês James Josheph Sylvester (1814 – 1897) no sentido que nos interessa aqui.

Os pontos podem representar pessoas, objetos, lugares, estrelas e até mesmo átomos, entre outros. As linhas ligam pares dessas pessoas, objetos, lugares etc. A abstração dessas situações é a qual dá lugar ao conceito de grafos podendo este ser representado por meio de diagramas, em que cada vértice é representado por um ponto e cada aresta por uma linha ligada aos pontos que representam seus extremos.

Os grafos compõem uma subárea diferente da matemática ao se utilizarem não de cálculos algébricos para a sua total resolução mas sim de um certo esforço cognitivo, dessa forma a maioria dos termos utilizados derivam da representação e estudos de conjuntos e diagramas. Por exemplo o grafo G = (V E). Na figura 11 representa-se seus vértices como V={A, B, C, D, E} e as arestas como E={{A,B},{A,C},{C,D},{C,E}}.

Figura 11 - Grafo G.



Fonte: Os autores, 2022.

3.2 Ordem de um grafo

Ordem de um grafo é a quantidade de vértices que ele possui. Em outras palavras, pode-se dizer também que é a quantidade de elementos do conjunto V. Assim, indica-se a ordem de um grafo G como |V(G)|. Se não houver dúvidas quanto ao grafo ao qual se refere, pode-se indicar a ordem do grafo por *v*.

3.3 Tamanho de um grafo

Tamanho de um grafo é igual a quantidade de arestas que possuem, ou seja, é a quantidade de elementos do conjunto E.

Da mesma forma, indicaremos o tamanho de um grafo pela notação $|E(G)|$ *E,* quando não há dúvidas, pela notação mais simples *e*.

Podem-se dizer que um grafo é nulo quando se tem ordem e tamanho iguais a zero $|V(G)|=|E(G)|=0$, e um grafo vazio aquele que tem vértices, mas não tem arestas. Diversos são os teoremas que se baseiam na quantidade de arestas que incidem em cada vértice de um grafo, como exemplo o conceito de grau.

3.4 Grau do vértice de um grafo

Grau de um vértice é a quantidade de arestas que incidem no vértice dessa forma indicamos o grau de um vértice $x \in V$ por *deg(x)*. Em um grafo simples (ou seja, que não é um multigrafo e sem laços) com v vértices, o maior grau possível de um vértice é $v - 1$ (caso em que o vértice se conecta a todos os outros vértices do grafo).

3.5 Caminhos

Entende-se por caminhos subgrafos que marcam trajetórias, sendo assim, uma conexão entre vértices do grafo.

3.5.1 Passeio ou percurso

Passeio ou percurso em um grafo $G = (V, E, \psi)$ é uma sequência formada por elementos de V(vértices) e de E(arestas) alternadamente $(x1, \varepsilon 1, x2, \varepsilon 2 \, . . . \, xn-1, \varepsilon n-1, xn)$, de modo que $\psi(\varepsilon i) = \{xi, xi+1\}$, para cada $i = 1, 2 \, . . . \, n - 1$.

Quando a partir de um determinado vértice percorre-se um caminho e retorna-se ao mesmo vértice temos um passeio fechado{C,A,B,C}.

3.5.2 Trilha ou cadeia

A trilha ou cadeia é um passeio que não passa pela mesma aresta mais de uma vez comum em grafos dirigidos que temos o passeio em uma única direção.

3.5.3 Caminho

Caminho é uma trilha que não repete vértices, no grafo dirigido vai-se de um vértice V{α} e um vértice V{β} será uma sequência de vértices de modo que do primeiro até o último se encontrem arestas entre eles, ou seja, do primeiro até o penúltimo nesse caso você tem uma aresta ligando ele é o próximo. O comprimento de um caminho se dará pelos números de arestas presentes nele Comp{A,B,C}={B,C,D}=3, no caso de grafos não ponderados já em um grafo ponderado é a soma dos pesos (rótulos) das arestas que fazem parte desse caminho.

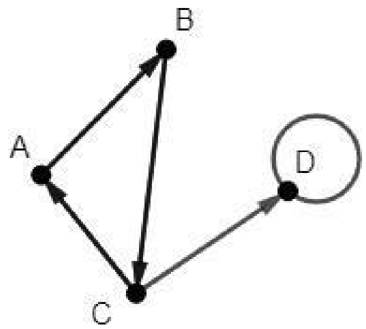
3.6 Grafos dirigidos

Denominam-se grafos dirigidos (ou direcionados) os grafos que possuem arestas as quais têm uma direção partindo de um vértice a outro. Significa que as relações têm um sentido definido, isto é, uma única direção.

Notem que na Figura 12 essa relação seja qual for que se esteja mapeando vai do vértice V{A} até V{B}, mas ela não vai do V{B} ao vértice V{A}, por não ser a mesma relação ou melhor essa relação sequer existe.

Em grafos dirigidos as arestas podem também ser pensados como pares ordenados de um vértice saindo de um e chegando em outro mesmo que ambos sejam o mesmo vértice, nesses casos denomina-se alto laço ou (self-loop) como por exemplo o V{D}.

Figura 12 - Grafo dirigido.



Fonte: Os autores, 2022.

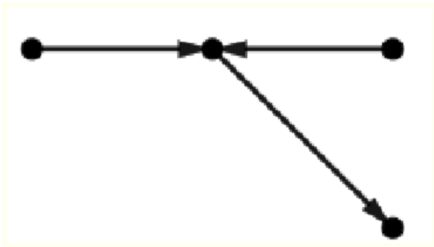
Se existem arestas conectadas a dois vértices V{α,β} denomina-se que essa aresta é incidente a eles e os dois vértices são adjacentes (ou vizinhos). Essa definição é bem restrita em grafos dirigidos. Assim sendo, no grafo (figura 12) os vértices V{A} e V{B} são adjacentes pois há uma aresta E{A,B}. Em contrapartida, V{A} e V{D} não são adjacentes.

O grau de um vértice de um grafo dirigido se dá pelo número de arestas que saem do vértice mais o número de arestas que chegam no mesmo como na figura 12. V{A} = V{B}= 2 e V{C}=V{D}= 3. Serão então classificados em dois tipos: grau de entrada o número de arestas que chegam ao vértice e grau de saída o número de arestas que saem do vértice.

Em grafos dirigidos o comprimento mínimo de um caminho para que seja um passeio fechado ou ciclo e de pelo menos uma aresta como no caso dos self-loops {D,D}. Um grafo dirigido é dito conexo se há pelo menos uma cadeia ligando cada par de vértices deste grafo

G.

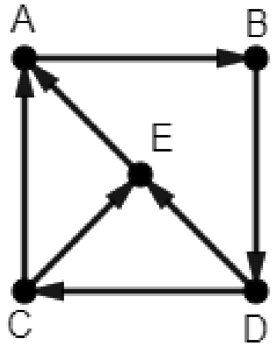
Figura 13 - Grafo conexo.



Fonte: Os autores, 2022.

Fortemente conexo se existir um caminho entre qualquer par de vértices, sendo assim, terá um caminho do vértice {A} até o vértice {B} e do vértice {B} ao vértice {A} retorna-se ao vértice {A} pelo caminho {B,D,E,A}, {B,D,C,E,A} ou {B,D,C,A} figura 14. Um grafo dirigido é conexo quando, diferente de um grafo fortemente conexo, terá apenas ou um caminho do vértice {α} até {β} ou um caminho {β} até {α}.

Figura 14 - Grafo fortemente conexo.

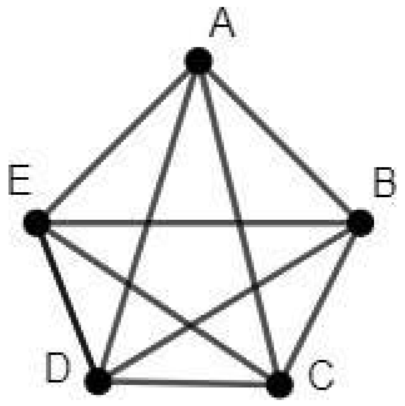


Fonte:Os autores, 2022.

3.7 Grafo não dirigido

Os grafos não dirigidos ou (não direcionados) não possuem uma direção ou um sentido pré-definido. Em outros termos, pode-se pensar em um grafo não dirigível como um grafo dirigível com as arestas possuindo sentido duplo, as quais por sua vez serão pares não ordenados de vértices. Os grafos não dirigidos não apresentaram *self-loops,* ou melhor, não é permitida a presença de *self-loops*. Quanto à relação de adjacência em grafos não dirigidos, diz-se que é simétrica e pode ser expressa da forma E={A,B} ⇔ E={B,A}.

Figura 15 - Grafo não dirigido.



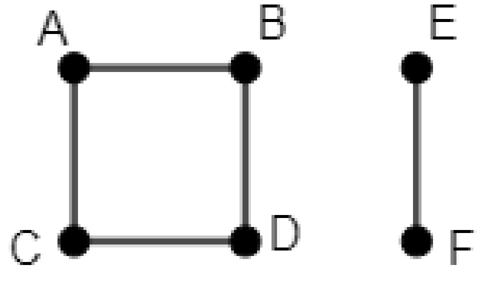
Fonte: Os autores, 2022.

O grau do vértice de um grafo não dirigido é o número de arestas que incidem sobre ele. Sendo assim, basta contar as arestas de cada vértice como na figura 15. V{A}= V{B} = V{C} = V{D} = V{E}= 4.

A definição de caminho dos vértices de grafos não dirigidos diferentes de grafos dirigidos teremos esses caminhos em mão dupla sendo assim se existe uma caminhos entres os V{A,B,C,D,E} também existe um caminho V{E,D,C,B,A}. O comprimento do caminho como em grafos dirigidos também se dará pelo número de arestas presentes neles, uma diferença importante é o número mínimo de arestas necessário para que se tenha um ciclo, em grafos não dirigidos este deverão ter pelo menos três V{A,B,C,A}.

Quando o grafo apresenta pelo menos um ciclo chama-se cíclico em casos que não apresente nem um ciclo acíclico. Quando em um grafo não dirigido todos os seus vértices estão ligados por uma arestas então ele será conexo ou (Conectado) já que cada par de vértices presentes nele está conectado por um caminho. Em casos em que nem todos os pares de vértices do grafo estão conectados por caminhos diz-se que este grafo é desconexo como na Figura 16.

Figura 16 - Grafo desconexo.



Fonte:Os autores, 2022.

3.8 Alguns teoremas da teoria dos grafos

Teorema 3.8.1: A soma dos graus dos vértices de um grafo simples é igual ao dobro do tamanho do grafo. Ou seja:

$$\sum \deg(x) = 2e, \; x \in V.$$

Demonstração: A demonstração é razoavelmente simples. Considera-se que o grafo é simples, ou seja, cada aresta incide em dois vértices distintos. Dessa forma, ao contabilizar o do grau de cada vértice, uma aresta será contada duas vezes. Portanto, ao somar os graus dos vértices, cada aresta será contada duas vezes, o que confirma o teorema.

3.9 Grafo completo

Grafo completo é um grafo simples em que cada vértice se conecta a todos os demais.

$$G \text{ é completo} \Leftrightarrow (\forall x \in V(G))\ deg(x) = v - 1.$$

Indicamos um grafo completo de v vértices por Kv. Um resultado importante para grafos completos é o seu número de arestas que se dá da seguinte maneira: seja um grafo completo com v vértices tem $e = v(v - 1)/2$ arestas.

Demonstração. Utilizando o teorema da seção 3.8. Quando se trata de um grafo completo, a definição seção 3.8 garante que cada vértice tem grau igual a $v - 1$. Como se tem v vértices, a soma dos graus será dada por $v(v - 1)$. Mas o teorema em questão afirma que essa soma é igual a 2e.

Daí, tem-se que $2e = v(v - 1) \Rightarrow e =(v(v - 1))/2$.

Exemplo 1. Em uma reunião de uma determinada empresa, cada funcionário que chega cumprimenta todos os demais já presentes. Qual a quantidade de cumprimentos que haverá, se foram convidados 10 funcionários?

Solução: Tal situação pode ser representada por um grafo. Basta tomar cada funcionário como um vértice e cada cumprimento como uma aresta. dessa forma se cada funcionário que chega cumprimenta todos os demais já presentes, quando o último o 10° convidado chegar, todos terão se cumprimentado. Ou seja, nosso grafo será um grafo completo. Dessa maneira,pode-se então determinar a quantidade de cumprimentos pelo número de arestas do grafo completo de 10 vértices:

$e = (v(v-1))/2 \Rightarrow e = (10(10-1))/2 \Rightarrow e = 10.9/2$

$\therefore e = 45$

Logo, haverá 45 cumprimentos quando todos os funcionários chegarem.

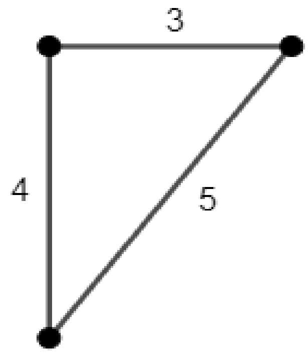
3.10 Multigrafo

Multigrafo é um grafo em que ao menos um par de vértices tem mais de uma aresta que os conecta. O grafo que representa o problema das pontes de Königsberg (Figura 4) é um exemplo de multigrafo: os vértices A e C têm duas arestas que os conectam, bem como os vértices A e B.

3.11 Grafo ponderado

É um grafo que quando derivado de um multigrafo, cada uma de suas arestas tem peso igual à quantidade de arestas do multigrafo que conectam cada par de vértices que se encontram conectados. Os grafos também podem apresentar pesos, custos, distância etc. associados às suas arestas representando quaisquer que sejam esses valores nesse caso então que esse grafo é ponderado.

Figura 17 - Grafo Ponderado.



Fonte: Os autores, 2022.

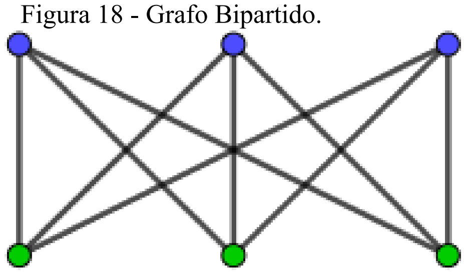
3.12 Classe de grafos

Vamos entender um pouco sobre algumas das classes de grafos que existem, suas aplicações e suas praticidades. Elas são muito importantes visto que solucionam diversos problemas complexos ao serem restringidos a uma determinada classe particular. Sendo assim, é possível caracterizar como um conjunto de grafos que têm alguma ou algumas propriedades em comum.

3.12.1 Grafos bipartidos

Um grafo G = (V, A) é denominado bipartido quando existir dois subconjuntos disjuntos U, W ⊂ V tais que V = U ∪ W e cada aresta de G possui um extremo em U e outro em W. Neste caso, dizemos ainda que o par {U, W} forma uma bipartição de G. Na Figura 18, o conjunto formado pelos pontos em azul e o conjunto dos pontos verdes formam uma bipartição do grafo.

Figura 18 - Grafo Bipartido.



Fonte: Os Autores, 2022.

Teorema 3.12.1: Um grafo é bipartido se, e somente se, não contém ciclos de comprimento ímpar.

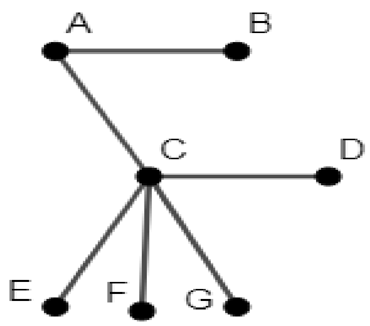
Demonstração: Seja G um grafo bipartido, logo ele não deverá conter ciclos ímpares. Sejam X e Y as duas partições de G. Todas as arestas de G não são adjacentes à vértice do mesmo conjunto, ou seja, cada aresta tem uma extremidade em X e a outra em Y, isso decorre da definição de bipartido. Suponha que um ciclo contenha o vértice v_i (um vértice qualquer de G) em uma das duas partições, para retornarmos a esse vértice teríamos que ir na outra partição e voltar um número de par de vezes.

Mutuamente, seja G um grafo onde todo ciclo é de comprimento par. Seja um vértice vi de G tal que vi ∈ X e todos os outros vértices que estão a uma distância par de v_i também são elementos da partição X, os outros vértices formam o conjunto Y. Se não houvesse aresta ligando vértice da mesma partição, G seria bipartido. Suponha que exista tal aresta com extremidade l e t, onde l, t ∈ X. Temos um caminho par entre l e t e adicionando mais uma aresta teremos um ciclo de comprimento ímpar, o que contradiz a hipótese. Portanto não pode existir outra aresta entre qualquer par de vértice da mesma partição e assim concluímos que o grafo G é bipartido.

3.12.2 Grafos de árvores

Grafo muito conhecido e utilizado, o grafo de árvore é uma grafo acíclico (não contém ciclos), também é conexo (existe ao menos um caminho entre quaisquer dois de seus vértices) exemplo bem comum de grafo de árvore seria uma árvore genealógica. (Figura 19)

Figura 19 - Grafo de árvore.



Fonte: Os autores, 2022.

<u>*Demonstração:*</u> Se G é uma árvore, então, por definição, G é conexo e sem ciclos. Como G é conexo, então existe um caminho entre cada par de vértices. Precisamos mostrar que este caminho quando existente é único.

Por absurdo, vamos supor que existam dois caminhos distintos entre um par de vértices. Se existem dois caminhos distintos entre um par de vértices então a união destes caminhos contém um ciclo. Mas por hipótese, o grafo não possui ciclos, portanto existe apenas um caminho entre cada par de vértices.

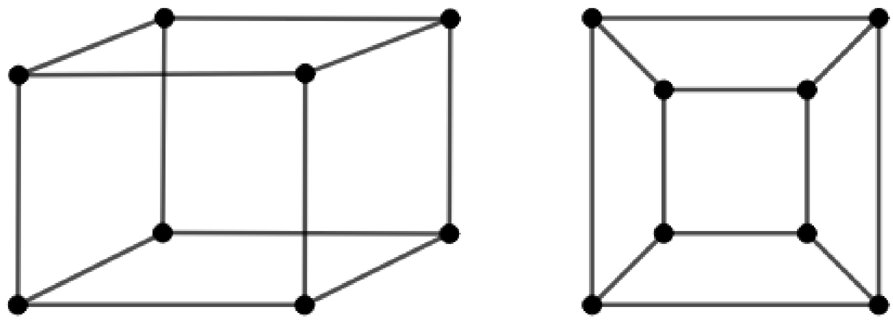
De forma análoga mostra-se que existe um, e unicamente um, caminho entre cada par de vértices, então G é uma árvore. Como existe um caminho entre cada par de vértices, temos que G é conexo. Supõe-se que G contenha um ciclo.

A existência de um ciclo no grafo implica que existem pelo menos um par de vértices A, B tais que existem dois caminhos distintos entre A e B. Mas, por hipótese, existe apenas um caminho entre cada par de vértices e, portanto, o grafo não tem ciclos.

3.12.3 Grafo Planar

Um grafo é considerado planar, se e somente se puder ser desenhado em um plano de tal forma que suas arestas não se cruzem ou seja não há interseção entre as arestas do desenho.

Figura 20- Cubo planarizado.



Fonte: Os autores, 2022.

Existem várias propriedades e teoremas relacionados a grafos planares. Alguns dos mais conhecidos como o Teorema das Quatro Cores, a Fórmula de Euler e o Teorema de Kuratowski, os grafos planares têm diversas aplicações em matemática, ciência da computação e redes. Por exemplo, é usado em algoritmos de roteamento em redes de comunicação, projeto de circuitos eletrônicos, solução de problemas de mapeamento e muitas outras áreas.

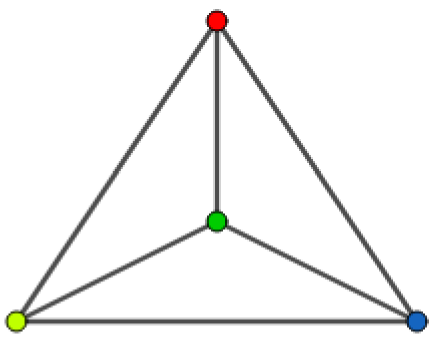
4 COLORAÇÃO

Dado um grafo qualquer realizar a sua coloração é atribuir rótulos a seus elementos (vértices ou arestas), rótulos esses comumente denominados de “cores”. Esse processo é efetuado seguindo algumas restrições e é chamado de coloração de vértices (ou arestas). No caso de uma coloração de vértices, dois vértices adjacentes devem receber cores distintas e, no caso de uma coloração de arestas, atribui-se uma cor para cada aresta de modo que duas arestas adjacentes não possuam a mesma cor.

4.1 Coloração de vértices

A coloração dos vértices de um grafo se dá pela atribuição de cores aos vértices, em que cada vértice receberá uma cor e apenas uma cor e os vértices adjacentes cores distintas, quando isso ocorre diz-se que o grafo é k-colorível em que k é o número de cores necessários para a coloração, como na figura 21 que é 4-colorível .

Figura 21- Grafo com coloração de vértices.



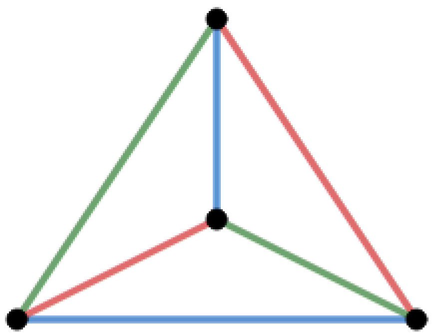
Fonte: Os autores, 2023.

O Número cromático de um grafo G, denota-se como X(G), é a menor quantidade de k cores distintas necessárias para a coloração dos vértices de G. Um grafo que apresentar essas características é então chamado de k-cromático.

4.2 Coloração de arestas.

Na coloração de arestas de grafos não-dirigidos ou não direcionados temos a atribuição de cores às arestas, com parâmetros parecidos com a coloração de vértices, cada aresta recebe apenas uma cor e coloração é válida se arestas incidentes a um mesmo vértice possuirem cores distintas.

Figura 22 - Grafo com coloração de arestas.



Fonte: Os autores, 2023.

Com base nas características da coloração de arestas definimos o índice cromático de um grafo G que é o menor número usado para colorir as arestas de um grafo de modo que arestas incidentes a um mesmo vértice recebam cores diferentes é dessa chamado índice cromático do grafo, o qual representaremos por x‘(G).

5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo será apresentado a análise qualitativa/quantitativa das experiências vivenciadas durante a aplicação da atividade proposta, bem como os procedimentos e metodologia utilizados na obtenção e tratamentos dos dados.

Quanto à metodologia, ela é a responsável por conduzir todas as etapas da pesquisa e nela são descritas as técnicas e métodos adotados pelo pesquisador; dependendo da linha de estudo observam-se vários tipos de pesquisas.

De acordo com Santos, Molina e Dias (2007) a metodologia é parte que compete ao pesquisador descrever como a pesquisa será realizada, descrever as fases desde a construção do referencial teórico até a aplicabilidade da metodologia, caso o trabalho tenha uma ação a ser realizada em campo.

Ressalta-se que o presente trabalho tem como base a revisão bibliográfica que se deu mediante uma leitura sistemática, com agrupamento das obras e materiais, destacando os elementos principais pertinentes ao assunto abordado pelos pesquisadores. Importante salientar, que a pesquisa integra um conjunto de fases, bem como: observação, indagação, interpretação, reflexão, análise e aplicação como é explicada por Severino (2007, p. 122) em meios de:

> [...] registro disponível, decorrente de pesquisas anteriores, em documentos impressos, como livros, artigos, teses etc. Utilizam-se dados de categorias teóricas já trabalhadas por outros pesquisadores e devidamente registrados. Os textos tornam-se fontes dos temas a serem pesquisados. O pesquisador trabalha a partir de contribuições dos autores dos estudos analíticos constantes dos textos (SEVERINO, 2007, p. 122).

Em relação às características desse modelo de pesquisa, sobressai a organização de dados, permite interpretar e redescobrir diversos pontos a respeito de um mesmo temática de estudo, ajuda a identificar omissões nas fontes de referência, propõe novas perspectivas de análise a partir de informações obtidas, possibilita autonomia ao pesquisador para chegar às suas conclusões, deduções e sínteses.

Em resumo, os procedimentos técnicos do trabalho correspondem a revisão bibliográfica, entretanto a pesquisa não é a única finalidade deste trabalho, possuindo aplicabilidade prática, possuindo uma abordagem quali-quantitativa, ou seja, uma pesquisa mista, que aborda a qualitativa e quantitativa. A pesquisa qualitativa é fundamentada em análises quantitativas. Desse modo, ela é utilizada de instrumento para entender, descrever, classificar e explicar fenômenos e a relação existente entre as variáveis.

Quanto a pesquisa quantitativa consiste em coletar dados através de questionários e faz utilidade das técnicas estatísticas a se tratar das informações coletadas. Dando sequência depois de coletados, os resultados das análises e dados são apresentados através de gráficos e tabelas. As técnicas que abordam a pesquisa quantitativa, buscam ter objetividade e retratam uma realidade exterior ao indivíduo.

5.1 A Construção do objeto de estudo

A escolha do tema se deu a partir de reuniões e conversas com o professor orientador deste trabalho, avaliando em conjunto com os autores em qual área da matemática estes possuíam mais afinidade, interesse ou curiosidade. Foi então que surgiu a ideia de trabalhar um tópico de análise combinatória que fosse não trivial e pouco abordado aos alunos do Ensino Médio. Dessa forma nos foi apresentada essa ferramenta que dificilmente é abordada ou é até mesmo "esquecida" nas aulas de matemática do ensino básico, a Teoria dos Grafos.

O referencial teórico utilizado como alicerce para esse trabalho propõe uma linguagem diferente da habitual nas aulas de matemática se utilizando não mais exclusivamente de cálculos ou fórmulas mas estimular o aluno a fazer suas próprias análises e deduções. Nesse contexto, a utilização de recursos tecnológicos se torna fortemente relevante, por possibilitar a articulação de vários registros de representação semiótica durante as aulas de matemática.

A coleta de dados teve início na apresentação e utilização do *software* GeoGebra, em atividades de matemática com alunos do 1º ano do Curso Técnico em Edificações na Forma Integrada ao Ensino Médio do IFAP. Para a análise dos dados, fez-se uso de uma abordagem qualitativa, pois segundo Denzin e Lincoln (2006), a pesquisa qualitativa envolve uma abordagem interpretativa do mundo, o que significa que seus pesquisadores estudam as coisas em seus cenários naturais, tentando entender os fenômenos em termos e significados que as pessoas a eles conferem. Portanto, compete ao pesquisador observar, investigar e analisar aspectos presentes nas respostas dadas pelos sujeitos no fazer matemática, durante o desenvolvimento das atividades, levando em conta suas percepções, atitudes e opiniões dentro do ambiente que estão acostumados.

A pesquisa teve início com a apresentação dos conceitos teóricos e aspectos básicos referentes ao que é um grafo, por se tratar de alunos do 1º ano sequer sabiam a diferença entre vértices e arestas, em seguida foi apresentado o GeoGebra para os alunos, que ficaram surpresos ao descobrir que todos os grafos e mapas apresentados, foram confeccionados com o programa, pois não o conheciam.

5.2 Lócus da Pesquisa

A pesquisa foi realizada no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amapá, Câmpus Macapá, que está situado na Rodovia Br 210 km 3, s/n, Bairro: Brasil Novo, CEP: 68909-398, Município de Macapá, no estado do Amapá. Em síntese, a história do Instituto Federal do Amapá (Ifap) começa em 25 de outubro de 2007. Em 29 de dezembro de 2008, a Lei no 11.892, que institui a Rede Federal de Educação Profissional, Científica e Tecnológica, transforma a ETFAP em Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amapá (IFAP) autarquia ligada ao Ministério da Educação, detentora de autonomia administrativa, patrimonial, financeira, didático-pedagógica e disciplinar, equiparada às universidades federais. Tendo por marco inicial das atividades no ensino, em 8 de setembro de 2010.

5.2.1 Infraestrutura e recursos humanos.

O IFAP conta com uma boa estrutura física com amplos espaços pedagógicos. Possui também além das salas de aulas, biblioteca, refeitório, área de convivência e laboratórios de informática, de biologia, química, física e matemática, salas de atendimento à saúde do aluno, e acompanhamento aos discentes com necessidades especiais. Vale também ressaltar que o IFAP possui métodos de acessibilidade tais como piso tátil, rampa e elevadores para alunos cadeirantes.

Também se nota uma ambientação adequada para o desenvolvimento do trabalho dos seus colaboradores, apresenta uma estrutura administrativa sistematizada em: Direção Geral do campus Macapá, Núcleo de Atendimento às Pessoas com Necessidades Específicas (Napne), Coordenação da Tecnologia da Informação, Seção de Gerenciamento da Comunicação Social (Secom), Direção de Ensino (Diren), Departamento de Administração e Planejamento e Departamento de Pesquisa e Extensão. funcionando nos turnos matutino, vespertino e noturno.

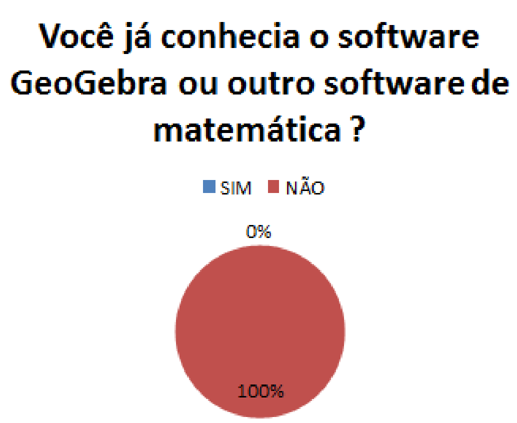
5.3 Sujeitos Participantes

A pesquisa inicialmente foi planejada para ser realizada com alunos do 2º ano do Ensino Médio, devido ao fato de estarem estudando análise combinatória e possuírem conhecimentos prévios e básicos sobre o assunto. A intenção era fornecer uma ferramenta adicional aos alunos para análise e resolução dos problemas. No entanto, devido a incompatibilidade de horários e outros fatores limitantes, não foi possível realizar a pesquisa com essa turma. Como alternativa, o trabalho foi conduzido com alunos do 1º ano do Ensino Médio, do Curso Técnico em Edificações.

Os resultados indicaram que, de forma geral, essa mudança não foi um grande problema, uma vez que a teoria dos grafos não requer muitos pré-requisitos para sua compreensão básica, conforme afirmado por Gouvêa (2020). Embora tenha havido evasão de alguns alunos durante a oficina de Matemática aqueles que permaneceram demonstraram entusiasmados e surpresa com a abordagem que do tema, percebendo que, apesar do nome não era algo complexo e difícil de compreender. Essa abordagem diferenciada quebrou a monotonia que das aulas de matemática.

O uso de softwares proporcionou diferentes formas de abordagem, transformando a matemática estática dos livros didáticos e quadros em uma matemática dinâmica em que o aluno se torna um agente ativo na construção do conhecimento. Em um questionário aplicado à turma pesquisada, perguntamos se os alunos já tinham ouvido falar de software voltado para a matemática; todos responderam que não. Como mostrado no Gráfico.

Figura 23 - Gráfico .



Fonte: Os autores, 2023.

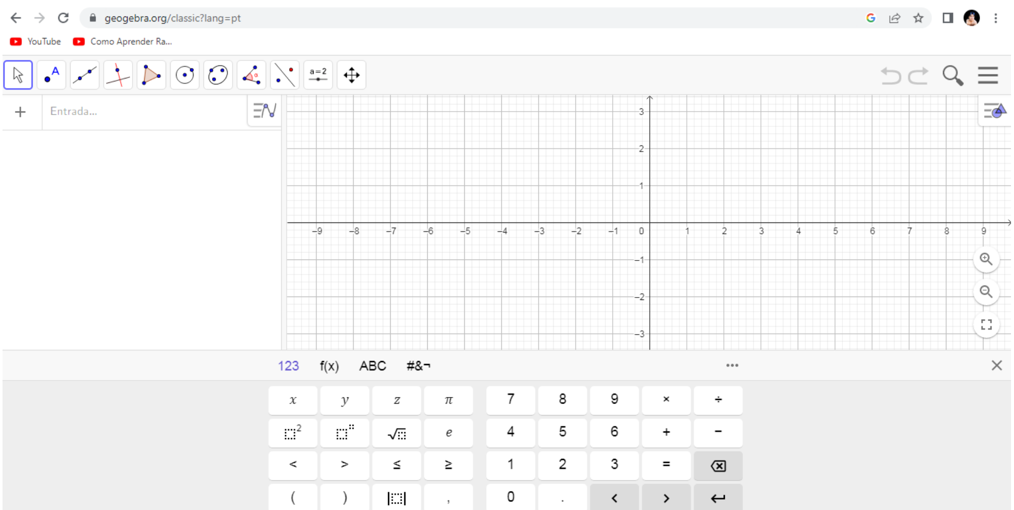
O resultado em questão reflete a resposta de uma pequena parcela do contingente escolar, dessa forma não é suficiente para generalizar, mas com toda certeza nos faz refletir o quão pouco os recursos tecnológicos estão sendo explorados dentro de sala de aula, mesmo a escola possuindo diversos laboratórios de informática.

5.4 Procedimentos de obtenção de informações empíricas

A Instituição possui um corpo pedagógico muito receptivo. Entramos em contato com a professora Jacqueline Sousa de Jesus, responsável pela Seção de Gerenciamento de Ensino Médio. Assim, logo após, selou-se a parceria para que pudéssemos realizar a aplicação da oficina na turma do 1° ano do Curso Técnico em Edificações na forma Integrada ao Ensino Médio, visando contribuir com uma ferramenta a mais na resolução de problemas.

Foi realizado um encontro de 2h/aula 50 min em formato de oficina, levamos os alunos até o laboratório de Matemática. Após isso com a ajuda do projetor conceituamos o que é um Grafo e todas as suas características básicas, como surgiu no seu contexto histórico e como está presente atualmente. Em seguida, para não perder tempo com as instalações utilizamos Geogebra em seu formato online otimizando o tempo. Foram feitas apresentações do software mostrando a sua área de trabalho e detalhando a Janela de Visualização a Barras de Menu e Ferramentas, além do Campo de Entrada (Figura 24).

Figura 24 - Janela inicial do *software* GeoGebra.



Fonte: Os autores, 2023.

Durante o encontro foram abordados conceitos básicos, como a construção geométrica no plano cartesiano, e os alunos foram incentivados a gerar figuras utilizando apenas vértices e arestas. Essas atividades visavam proporcionar o entendimento e resolução dos problemas que seriam propostos posteriormente.

6 APRESENTAÇÃO E ANÁLISES DOS DADOS

Neste capítulo, serão apresentados os resultados e as análises dos dados coletados durante a pesquisa, juntamente com os procedimentos adotados. Serão discutidas as possíveis contribuições da temática da Teoria dos Grafos para o ensino e aprendizagem da Matemática, levando em consideração os aspectos observados nos aluno durante as atividades e o impacto do uso do software GeoGebra.

6.1 Atividades propostas

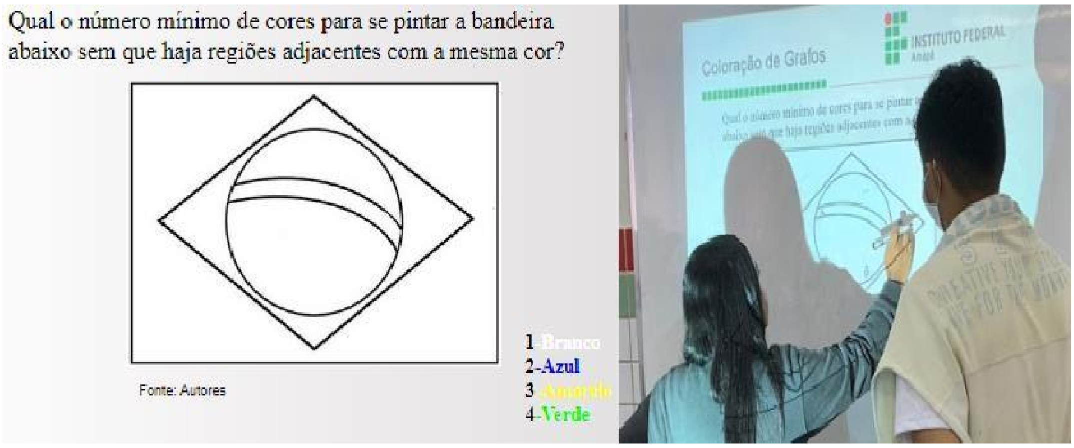
6.1.1 Problema 1

Nesta atividade foram trabalhados não só os conceitos iniciais da teoria dos grafos, mas também a representação gráfica de figuras e mapas em forma de grafos dentro do GeoGebra e, posteriormente, foi abordado o Teorema das Quatro Cores para colorir essas figuras e mapas.

Foi feito um breve contexto histórico sobre os grafos, abordando a origem do problema das sete pontes de Konigsberg e a importância que Leonard Euler teve para a criação da teoria dos grafos. Em seguida mostramos como os grafos estão constantemente no nosso dia a dia, apresentando e conceituando o que é um grafo de maneira mais sucinta possível por serem alunos do 1º ano e estarem vendo tais conceitos pela primeira vez.

Feito isso apresentamos o Teorema das Quatro Cores e foi proposto que os alunos pintassem a bandeira brasileira com o menor número possível de cores distintas em suas áreas adjacentes. Tal problema pode ser contextualizado e trabalhado utilizando grafos e representa uma aplicação prática do Problema das Quatro Cores. (Figura 25)

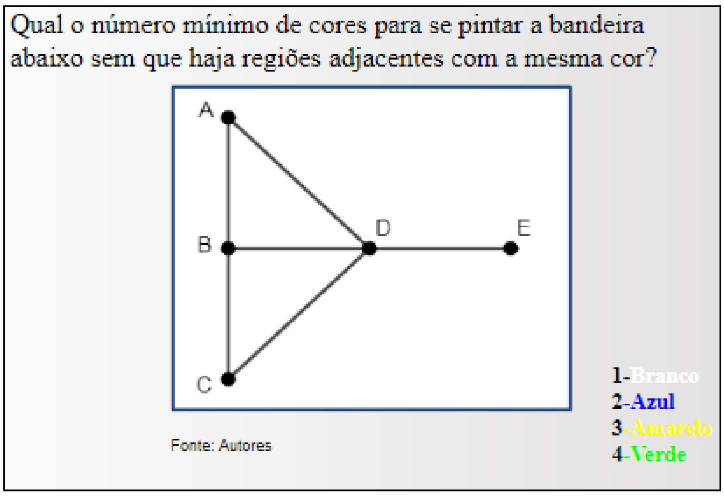
Figura 25 - Exercício 1.



Fonte: Os autores, 2023.

Depois de muitas tentativas dos alunos e grandes dificuldades principalmente em identificar as áreas de adjacência, foi mostrada outra imagem, sendo esta uma representação por meio de um grafo, da situação- problema anterior, conforme mostrado na Figura 26. Usando o GeoGebra os alunos coloriram o grafo sem grandes dificuldades.

Figura 26 - Grafo do exercício 1.



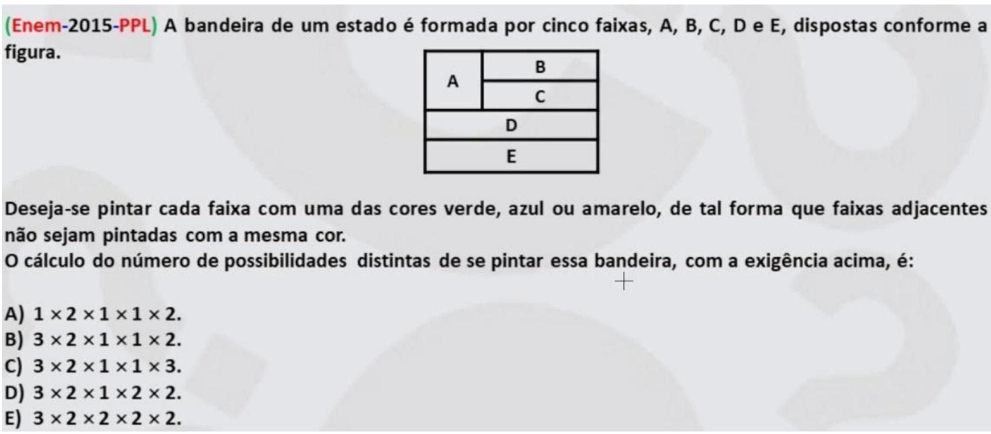
Fonte: Os autores, 2023.

Os alunos ficaram surpresos ao descobrir que o grafo apresentado correspondia a imagem anterior. A partir desse momento, todos os exercícios subsequentes foram abordados utilizando a representação em forma de grafos. Com essa abordagem, os alunos não tiveram muitas dificuldades em identificar as regiões adjacentes, uma vez que bastava verificar quais vértices estavam conectados por arestas. A simples modelagem em forma de grafo foi suficiente para a resolução do problema proposto.

6.1.2 Problema 2

Com base no teorema das quatro cores e na coloração de grafos foi proposto um exercício um pouco mais complexo e contextualizado, envolvendo a coloração de uma bandeira em uma configuração de diferente, conforme mostrado na Figura 27. Este problema foi abordado no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) de 2015. Considerando que os alunos do 1º ano do Ensino Médio ainda não estudaram conteúdos de análise combinatória, como os princípios de contagem, essa situação-problema poderia ser desafiadora para eles, no entanto aplicando os conceitos de grafos com base no exercício anterior, os participantes foram capazes de resolver o problema**.**

Figura 27 - Exercício 2



(Enem-2015-PPL) A bandeira de um estado é formada por cinco faixas, A, B, C, D e E, dispostas conforme a figura.

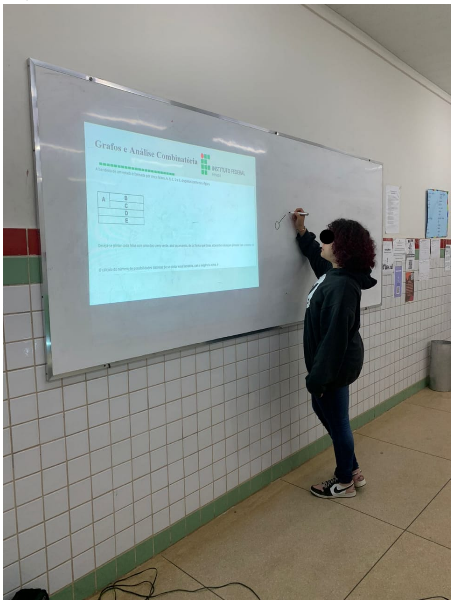
Deseja-se pintar cada faixa com uma das cores verde, azul ou amarelo, de tal forma que faixas adjacentes não sejam pintadas com a mesma cor.
O cálculo do número de possibilidades distintas de se pintar essa bandeira, com a exigência acima, é:

A) $1 \times 2 \times 1 \times 1 \times 2$.
B) $3 \times 2 \times 1 \times 1 \times 2$.
C) $3 \times 2 \times 1 \times 1 \times 3$.
D) $3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 2$.
E) $3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$.

Fonte: ENEM, 2015.

Mesmo com um problema que inicialmente poderia apresentar certa dificuldade aos alunos, eles começaram a generalizar a imagem da bandeira, representando-a por meio de vértices e arestas. Essa representação permitiu reduzir o problema a um grafo não direcionado, onde bastava analisar quais vértices eram adjacentes e quantas opções de cores estavam disponíveis. Na Figura 28, é mostrada a imagem de uma das participantes transcrevendo no quadro branco a representação da situação por meio de um grafo.

Figura 28- Aluna resolvendo Exercicio 2.



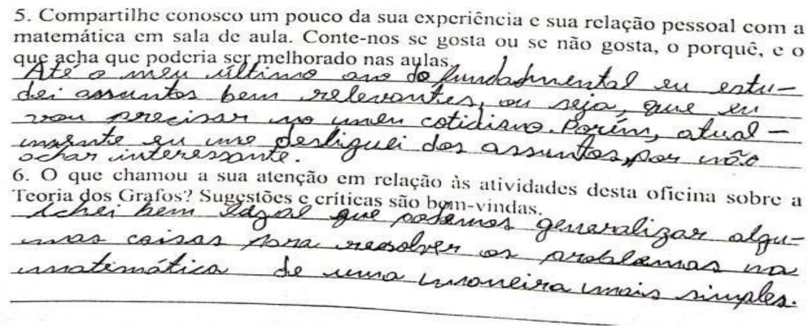
Fonte: Os autores, 2022.

6.2 Análise da percepção e respostas dos alunos

Após o contato com as ideias iniciais sobre os grafos e a aplicação dos problemas apresentados, foi aplicado um questionário aos alunos com algumas perguntas sobre sua relação com a matemática, o que chamou-lhes a atenção nas atividades, e sobre o que entenderam a respeito dos grafos. A seguir, propõe-se que sejam observadas algumas das respostas obtidas, pois estas trazem importantes implicações e reflexões sobre o ensinar e aprender matemática.

Na Figura 26, tem-se a resposta do aluno A a duas perguntas: a primeira refere-se a que ele compartilhe sua experiência e relação pessoal com a matemática, pois é importante saber do sujeito quais as suas dificuldades, facilidades, ou seja, é necessário dar espaço para que o aluno possa expressar suas opiniões e anseios. A segunda pergunta leva o aluno a refletir sobre o conteúdo trabalhado e a externalizar suas percepções com as próprias palavras, o que pode dar indícios de seu entendimento e dificuldades, fornecendo dados e mecanismos para que o professor possa intervir. Em resposta à pergunta 5 (Ver a Figura 29) o aluno A considera que em algum momento de sua vida escolar, mais precisamente até o último ano do Ensino Fundamental, este achava que os conteúdos matemáticos eram "relevantes", como o próprio aluno menciona, "que iria precisar em meu cotidiano". É muito comum uma grande parte dos estudantes terem essa percepção, de que a matemática escolar está desconectada com a realidade. Muitas vezes, a pergunta “Para que serve este assunto?” é feita por alunos nas salas de aula. Então surge a seguinte reflexão: será que o sujeito deve estudar apenas aquilo que vai aplicar em seu cotidiano? Que ganhos intelectuais, formas novas de pensar e raciocinar podem ser adquiridas e desenvolvidas, só pelo simples fato de estudar um tema novo, não necessariamente ligado à Matemática?

Figura 29 - Resposta do Aluno A.


5. Compartilhe conosco um pouco da sua experiência e sua relação pessoal com a matemática em sala de aula. Conte-nos se gosta ou se não gosta, o porquê, e o que acha que poderia ser melhorado nas aulas.

Até o meu último ano do fundamental eu estudei assuntos bem relevantes, ou seja, que eu vou precisar no meu cotidiano. Porém, atualmente eu me desliguei dos assuntos, por não achar interessante.

6. O que chamou a sua atenção em relação às atividades desta oficina sobre a Teoria dos Grafos? Sugestões e críticas são bem-vindas.

Achei bem legal que podemos generalizar algumas coisas para resolver os problemas na matemática de uma maneira mais simples.

Fonte: Os autores, 2023.

O que se percebe é que há uma maior motivação com o conhecimento prático-utilitário, haja vista a perceptível desmotivação dos alunos quando não percebem uma aplicabilidade do conteúdo estudado, sobretudo em relação à Matemática, que é o tema deste trabalho.

Outro participante, que foi identificado como Aluno B, quando indagado sobre sua relação com a Matemática, enfatiza: “Não gosto, pois não sou bom em Matemática”, conforme mostrado na Figura 30. A partir da fala do aluno, é nítido que a relação que uma grande parte dos alunos têm com a matemática não é a melhor. Entretanto, apenas conhecer ou constatar este fato sem uma proposta de intervenção não causará mudanças positivas, ou mesmo alguma ideia do que fazer para mudar tal realidade. Mas, o mesmo aluno que fez uma afirmação negativa na pergunta anterior, menciona que o método abordado, que ele chamou de “Transformar as imagens em gráficos”, lhe chamou a atenção. Talvez, então o problema não esteja no sujeito, mas na forma como o conteúdo matemático é trabalhado. Utilizar recursos que fogem do habitual e temas interessantes pode despertar a curiosidade e a atenção dos alunos, mesmo daqueles que dizem “não gostar” de matemática.

Figura 30 - Resposta do Aluno B.

5. Compartilhe conosco um pouco da sua experiência e sua relação pessoal com a matemática em sala de aula. Conte-nos se gosta ou se não gosta, o porquê, e o que acha que poderia ser melhorado nas aulas.

NÃO GOSTO, POIS NÃO SOU BOM EM MATEMÁTICA.

6. O que chamou a sua atenção em relação às atividades desta oficina sobre a Teoria dos Grafos? Sugestões e críticas são bem-vindas.

TRANSFORMAR AS IMAGENS EM GRAFICOS, E ALGO QUE CHAMA A ATENÇÃO.

Fonte: Os autores, 2023.

Uma vez que despertamos a curiosidade dos alunos, observamos um aumento do entusiasmo, da atenção e principalmente do engajamento e participação, à medida que eles começaram a associar os grafos a outros conteúdos, dentro das atividades propostas. Um exemplo dessa relação, foi bem observado pelo Aluno C que associou os grafos dirigidos aos gráficos das aulas de Física (Ver a Figura 31).

De fato, pode-se entender que um gráfico de pontos e linhas, pode ser tratado matematicamente como um grafo; é um dos grandes ganhos de se tatar objetos como grafos, é a simplicidade de visualização de propriedades e relações entre os elementos.

Figura 31 - Resposta do aluno C.

Queremos conhecer mais sobre você e seus conhecimentos sobre a Teoria dos Grafos, e o que aprendeu nestes encontros.

1. Você já conhecia a Teoria dos Grafos antes da oficina?

(   ) Sim

(X) Não

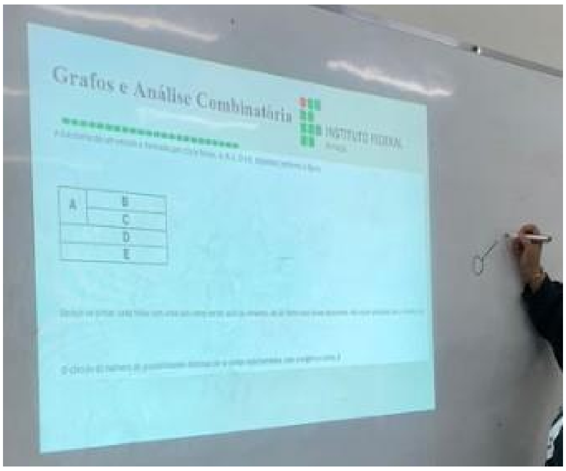
2. A respeito da Teoria dos Grafos. Consegue lembrar de alguma situação prática em que seria possível aplicá-lo para resolver um problema?

Sim, na física utilizamos os grafos dirigidos em gráficos.

Fonte: Os autores, 2023.

Ao entenderem e serem capazes de transformar as imagens em grafos sozinhos e solucionar os problemas, o entusiasmo obviamente aumenta bastante, antes um problema que parecia muito complexo para alunos do 1º ano já não era mais um desafio tão grande e a certo ponto passou a ser uma competição para quem o resolvia correto primeiro. Quando há produtividade, isto é, quando o aluno consegue compreender e resolver problemas com êxito, o "mau gosto” pelo conteúdo parece ir embora, dando lugar aos poucos ao entusiasmo e motivação.

Figura 32 - Um dos participantes representando um problema descrito por meio de um grafo no quadro.



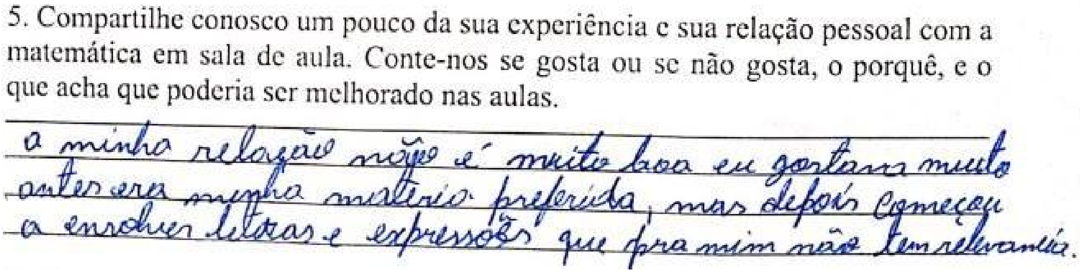
Fonte: Os autores, 2023.

Na maioria das vezes o aluno não gosta da matéria simplesmente por não entender o conteúdo ou não conseguir encontrar um uso prático para aquele conhecimento gerando a famosa pergunta ‘Onde vou usar isso na minha vida?”. Mas, uma vez que os alunos entenderam o que é um grafo, começaram a generalizar e organizar as informações em forma de grafo sozinhos foram capazes de encontrar um uso prático.

Analisando a resposta do Aluno D (Figura 33), há muitas reflexões sobre a percepção que os sujeitos têm em relação à Matemática. Fica novamente evidente que parece ser muito presente nos alunos o sentimento de que a Matemática trabalhada em sala de aula é irrelevante, sem importância.

Em algum momento da vida escolar deste aluno, a Matemática deixou de ser a sua matéria preferida, para transformar-se em algo repulsivo. Baseado no seu relato, tal frustração teve seu início quando houve a necessidade de representar objetos matemáticos por meio de letras, conforme a transcrição fala do aluno: “...mas depois começou a envolver letras e expressões que para mim não tem relevância.” (Figura 33)

Figura 33 - Resposta do aluno D.


5. Compartilhe conosco um pouco da sua experiência e sua relação pessoal com a matemática em sala de aula. Conte-nos se gosta ou se não gosta, o porquê, e o que acha que poderia ser melhorado nas aulas.

a minha relação não é muito boa eu gostava muito antes era minha matéria preferida, mas depois começou a envolver letras e expressões que pra mim não tem relevância.

Fonte : Os autores, 2023.

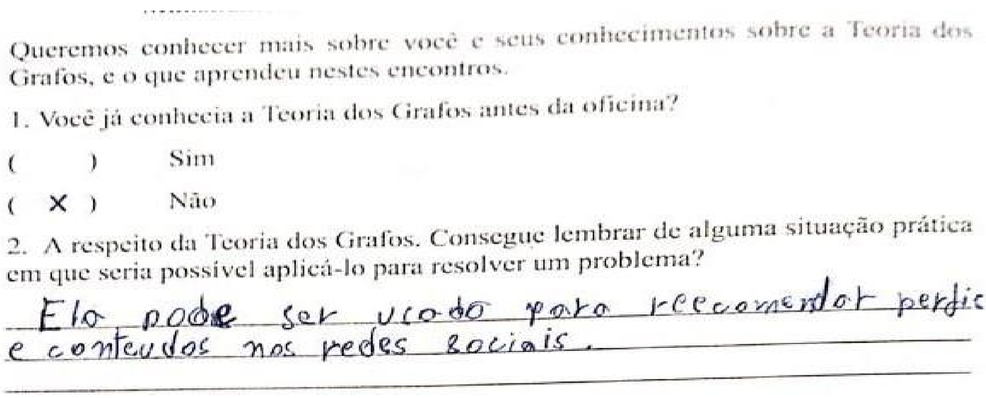
De fato, a representação algébrica e abstrata em Matemática não é uma tarefa trivial, e suas conexões com aplicações práticas não são óbvias para a maioria dos alunos. Diante disso, é responsabilidade do professor mostrar de uma maneira mais palpável e contextualizada os conceitos matemáticos, pois é pouco provável que alunos do ensino básico possuam maturidade suficiente para motivar-se por conteúdos abstratos, desconectados da realidade e sem algum significado que faça sentido para eles.

Mesquita (2021, p. 65) enfatiza que a tema Teoria dos Grafos pode ser extremamente promissor para despertar o interesse e a motivação pela Matemática, haja vista que os problemas que podem ser abordados geralmente fazem parte do conhecimento e de coisas que a maioria dos alunos têm contato, como por exemplo , as redes sociais.

> Concluímos que a inclusão da teoria dos grafos seria uma alternativa de conteúdo a ser trabalhado com os alunos da educação básica, e sem grandes obstáculos, pois atende às expectativas de aplicabilidade do conhecimento adquirido na resolução de situações problema encontradas no cotidiano, além de ser uma porta de entrada para a apresentação de novos conteúdos. (MESQUITA, 2021, p.65)

Uma evidência disto, está refletida na resposta do Aluno E, que ao comentar sobre grafos, faz uma associação a recomendação de perfis e conteúdos nas redes sociais, tema que faz parte da vida de praticamente todos os alunos atualmente (Ver a Figura 34).

Figura 34 - Resposta do aluno E.



Queremos conhecer mais sobre você e seus conhecimentos sobre a Teoria dos Grafos, e o que aprendeu nestes encontros.

1. Você já conhecia a Teoria dos Grafos antes da oficina?

( ) Sim

(X) Não

2. A respeito da Teoria dos Grafos. Consegue lembrar de alguma situação prática em que seria possível aplicá-lo para resolver um problema?

Ela pode ser usado para recomendar perfis e conteudos nos redes sociais.

Fonte: Autores, 2023.

Ao final da oficina, percebendo o entusiasmo de todos, foi proposto um desafio, com base na demonstração de Kamper e utilizando o GeoGebra para os participantes: **encontrar um grafo que necessitasse de 5 cores distintas para sua coloração**. Espera-se com este trabalho ter causado um pouco de reflexão entre os alunos. Junto com o tema, o uso de *softwares* como o GeoGebra pode ser uma ferramenta muito útil para tornar as aulas de matemática mais interessantes, dinâmicas e interativas, permitindo que os alunos assimilem e associem o conteúdo com o cotidiano de forma mais fácil, eficiente e eficaz, além de facilitar a organização das informações. Nesse contexto, Borba e Penteado (2010, p. 32) enfatizam que o uso de ambientes computacionais, como os possibilitados pelo GeoGebra favorecem as atividades nas aulas de matemática com esta abordagem. Sem dúvida a utilização desse recurso foi determinante para o sucesso desta pesquisa.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo apresentar uma abordagem inicial e introdutória da teoria dos grafos, desde as suas origens até os tempos mais atuais, tendo em vista que, apesar de ser um tema razoavelmente recente na matemática, muita das vezes sequer é citado em sala de aula, tornando-o um assunto que para a grande maioria dos estudantes é totalmente desconhecido, por não ser um tema rotineiramente abordado nas aulas de análise combinatória.

A inclusão da teoria dos grafos mesmo, que de forma sucinta é uma alternativa não só ao conteúdo a ser trabalhado, mas também uma possibilidade de ampliar as alternativas dos alunos da educação básica ao se depararem com problemas de natureza diversa: pessoas, cidades, ruas, estrelas, átomos etc., e sem grandes dificuldades, devido à ausência de grandes pré-requisitos.

Devido ao tempo reduzido que tivemos com os alunos, não foi possível abordar problemas mais complexos e elaborados, que demandam mais encontros com os participantes. No entanto, se tivéssemos mais tempo para reforçar os conceitos e ampliar o conhecimento dos alunos, seria possível abordar outros problemas, como aplicações de grafos em matrizes. Esse tipo de abordagem poderia ser realizado com alunos do 3° ano do Ensino Médio, ou até mesmo com alunos de graduação que já possuam algum conhecimento de Álgebra Linear e computação.

Espera-se que este trabalho possa de alguma forma motivar e contribuir para a realização de trabalhos posteriores sobre a teoria dos grafos fazendo uso ou não de *softwares* como o GeoGebra para dinamizar o processo de ensino e aprendizagem de matemática, ao fazer uso de um ambiente diferente do habitual, dessa forma estimulando a criatividade do aluno no tratamento das informações para a resolução de problemas.

REFERÊNCIAS

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e Educação Matemática**. 4 ed. Belo Horizonte, MG, 2010, 104 p.

BOTLER, Fábio *et al.* **Combinatória**. Rio de Janeiro, 2022. 306 p.

BURGUETTI, Renata**. Alguns tipos de grafos e aplicações**. 2022. 79f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, PR, 2022.

BRASIL. Lei n. 11.892 de 28 de dezembro de 2008**. Institui a Rede Federal de Educação Profissional, Científica e Tecnológica, cria os Institutos Federais de Educação, Ciência e Tecnologia e dá outras providências.** Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2007-2010/2008/Lei/L11892.htm. Acesso em: 25 maio. 2023.

DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. Introdução: a disciplina e a prática da pesquisa qualitativa. In: DENZIN, N. K. e LINCOLN, Y. S. (Orgs.). **O planejamento da pesquisa qualitativa: teorias e abordagens**. 2 ed. Rio Grande do Sul: Porto Alegre, RS, 2006. p. 15- 41.

GOUVÊA, Juliana Rezende de. **Uma outra visão sobre análise combinatória**. 2020. 54f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, 2020.

LUCCHESI, Cláudio Leonardo. **Introdução a Teoria dos Grafos**. Rio de Janeiro, RJ: Editora do IMPA, 1968. 152 p.

LIMA, Carlos Laércio Gomes de. **Um estudo sobre a teoria dos Grafos e o Teorema das Quatro Cores.** 2016. 106f. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática) - Instituto de ciências, matemática e computação, São Paulo, SP, 2016.

MESQUITA, Carolina Pereira Vaz. **Grafos e suas aplicações no ensino de matemática.** 2021. 68f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional) - Universidade Federal de Viçosa, Minas Gerais, MG, 2021.

NOGUEIRA, Daniel Klug**. Introdução à Teoria dos Grafos: Proposta para o Ensino Médio**. 2015. 119f. Dissertação (Mestrado - Mestrado Profissional em Matemática) -Universidade de Brasília, Brasília, DF, 2015.

SANTOS, G. do R. C. M.; MOLINA, N. L. e DIAS, V. F. **Orientações e dicas práticas para: Trabalhos acadêmicos**. 20. ed. Curitiba: IBPEX, 2007.

SEVERINO, Antônio Joaquim. **Metodologia do trabalho científico.** 23. ed. rev. e atual. São Paulo: Cortez, 2007.

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO

OFICINA: TEORIA DOS GRAFOS: uma abordagem introdutória.

Ministrante: Benedito Silva da Luz; Thiago Costa da Silva.

Queremos conhecer mais sobre você e seus conhecimentos sobre a Teoria dos Grafos, e o que aprendeu nestes encontros.

1. Você já conhecia a Teoria dos Grafos antes da oficina? ( ) Sim

( ) Não

2. A respeito da Teoria dos Grafos. Consegue lembrar de alguma situação prática em que seria possível aplicá-lo para resolver um problema?

____

____

____

3. Você já ouviu falar ou conhece alguma Teoria matemática? Se SIM, qual?

____

____

____

____

4. Você já conhecia o software GeoGebra ou outro software de matemática? Conte-nos um pouco sobre.

____

____

____

____

5. Compartilhe conosco um pouco da sua experiência e sua relação pessoal com a matemática em sala de aula. Conte-nos se gosta ou se não gosta, o porquê, e o que acha que poderia ser melhorado nas aulas.

____

____

____

6. O que chamou a sua atenção em relação às atividades desta oficina sobre a Teoria dos Grafos? Sugestões e críticas são bem-vindas.

____

____

____

____