INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO AMAPÁ
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
CAMPUS MACAPÁ

EMANOELLE LOPES DA SILVA
EMERSON DOS SANTOS MONTEIRO

MODELAGEM MATEMÁTICA COMO METODOLOGIA ALTERNATIVA NO ENSINO DE FUNÇÃO QUADRÁTICA.

MACAPÁ
2023

EMANOELLE LOPES DA SILVA
EMERSON DOS SANTOS MONTEIRO

MODELAGEM MATEMÁTICA COMO METODOLOGIA ALTERNATIVA NO ENSINO DE FUNÇÃO QUADRÁTICA.

Trabalho de Conclusão de Curso de graduação apresentado ao Instituto Federal do Amapá como requisito avaliativo para obtenção do título de Licenciatura em Matemática.
Orientador: Prof. Me. Francielck Domingos Freire.

MACAPÁ
2023

Biblioteca Institucional - IFAP
Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

S586m Silva, Emanoelle Lopes da
Modelagem matemática como metodologia alternativa para o ensino de função quadrática / Emanoelle Lopes da Silva, Emerson dos Santos Monteiro. - Macapá, 2023.
54 f.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) -- Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amapá, Campus Macapá, Curso de Licenciatura em Matemática, 2023.

Orientador: Francielck Domingos Freire.

1. Ensino. 2. Função quadrática. 3. Modelagem matemática. I. Monteiro, Emerson dos Santos. I. Freire, Francielck Domingos, orient. II. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica do IFAP com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

EMANOELLE LOPES DA SILVA

EMERSON DOS SANTOS MONTEIRO

MODELAGEM MATEMÁTICA COMO METODOLOGIA ALTERNATIVA NO ENSINO DE FUNÇÃO QUADRÁTICA.

Trabalho de Conclusão de Curso de graduação apresentado ao Instituto Federal do Amapá como requisito avaliativo para obtenção do título de Licenciatura em Matemática.
Orientador: Prof. Me. Francielck Domingos Freire.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Me. Francielck Domingos Freire (Orientador)

Instituto Federal do Amapá (Campus Macapá)

Documento assinado digitalmente
gov.br
HELINGTON FRANZOTTI ARAUJO DE SOUZ
Data: 18/08/2023 17:12:12-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Me. Helington Franzotti Araújo de Souza (Membro interno)

Instituto Federal do Amapá (Campus Macapá)

Paulo Robson Pereira da Cunha

Prof. Me. Paulo Robson Pereira Cunha (Membro externo)

Instituto Federal do Amapá (Campus Porto Grande)

Apresentado em: 19/06/2023.

Conceito/Nota: 99,34

Aos nossos pais por toda dedicação e incentivo durante a jornada acadêmica, proporcionando-nos uma trajetória educacional com êxito.

AGRADECIMENTOS

À Deus, pela saúde e por ter nos dado força e ânimo para superar cada obstáculo e chegar até aqui. E por sua grande e infinita bondade. Sabemos que tens o melhor para nós.

Ao grande mestre e orientador Francielck Domingos Freire, pela paciência, parceria e disposição, que não mediu esforços para auxiliar na construção deste Trabalho de Conclusão de Curso.

Às nossas famílias, pelas orações, pelo incentivo e apoio durante a graduação.

Aos professores do colegiado de matemática, ao coordenador de curso André Ferreira, e em especial à professora Cristina Coutinho, que desempenhou um importante papel na ministração da disciplina.

À banca de TCC, por terem aceitado entrar neste desafio conosco.

À professora Quele Rodrigues, pelo apoio ao nosso trabalho.

Aos nossos amigos e colegas da turma de matemática 2018.2 por grandes momentos de interação e compartilhamento de conhecimentos, principalmente, ao grupo EEFF (Emanoelle, Emerson, Fabiana e Fernanda), e aos nossos amigos de outros semestres que contribuíram direta e indiretamente.

Ao corpo técnico da Seção de Gerenciamento dos Laboratórios de Informática - SELABI, que sempre disponibilizaram o uso do laboratório e computadores para o desenvolvimento desta pesquisa.

Aos nossos amores, Alessandro e Luiz pela colaboração e por todo apoio nos momentos que precisamos.

E um salve especial por nossa parceria desde o início do curso, Emanoelle e Emerson.

Nossos sinceros agradecimentos.

“Se a educação sozinha não transforma a sociedade, sem ela tampouco a sociedade muda.”

(Freire, 2000, p.31).

RESUMO

O presente trabalho abordou a aplicação da Modelagem Matemática como uma metodologia alternativa no ensino da função quadrática no ensino médio, por meio de situações reais. Inicialmente, são apresentados conceitos e ideias sobre a modelagem matemática e suas etapas. Em seguida, essa metodologia foi adaptada, seguindo o mesmo referencial, para o ensino da função quadrática em uma turma de 1° ano do Ensino Médio do curso Técnico em Redes de Computadores do Instituto Federal do Amapá. Nessa abordagem, foi realizado um diagnóstico do nível de aprendizado dos alunos e, com base nisso, promovido revisões técnicas sobre o conteúdo da função quadrática. Posteriormente, deu-se a aplicação de uma atividade de modelagem matemática com exemplos do cotidiano relacionados à função quadrática, seguindo as etapas da modelagem matemática. Com essa aplicação, percebeu-se uma aprendizagem por parte dos alunos, mais significativa, reflexiva, crítica, motivadora e relevante em relação ao conteúdo. Essa constatação é corroborada pela análise de um questionário respondido pelos próprios alunos, acerca da metodologia aplicada, e pelas observações feitas nas considerações finais.

Palavras-chave: ensino; função quadrática; metodologia; modelagem matemática.

ABSTRACT

The present work addressed the application of Mathematical Modeling as an alternative methodology in teaching the quadratic function in high school, through real situations. Initially, concepts and ideas about mathematical modeling and its stages are presented. Then, this methodology was adapted, following the same reference, for teaching the quadratic function in a 1st year high school class of the Technical Course in Computer Networks at the Federal Institute of Amapá. In this approach, a diagnosis of the students' learning level was carried out and, based on this, technical revisions were promoted on the content of the quadratic function. Subsequently, a mathematical modeling activity was applied with everyday examples related to the quadratic function, following the steps of mathematical modeling. With this application, it was noticed that the students learned more meaningfully, reflectively, critically, motivating and relevant in relation to the content. This finding is corroborated by the analysis of a questionnaire answered by the students themselves, about the applied methodology, and by the observations made in the final considerations.

Keywords: teaching; quadratic function; methodology; mathematical modeling.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
IFAP	Instituto Federal do Amapá
SELABI	Seção de Gerenciamento dos Laboratórios de Informática
TCC	Trabalho de Conclusão de Curso

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

As dificuldades com o ensino da matemática têm como causas alguns fatores e, talvez, entre eles, possa estar a dificuldade do aluno em compreender como aplicar a matemática no dia a dia, e também a dificuldade de alguns professores de fazer as devidas associações entre os conteúdos e a realidade vivenciada pelos alunos. Na visão de Santos, França e Santos (2007) não é difícil ensinar matemática para aqueles que gostam, o maior desafio será ensinar para aqueles que não gostam ou não conseguem percebê-la. Neste sentido, metodologias alternativas têm sido observadas fazendo parte das práticas de professores de matemática, em especial, que é o foco de atenção deste trabalho, a modelagem matemática.

A modelagem matemática, conforme Biembengut e Hein (2023, p.12), consiste "num processo que envolve a obtenção de um modelo", de forma que interliga a matemática e a realidade, e ainda segundo os autores "resolução de problema, em geral quando quantificado, requer uma formulação matemática detalhada. Nessa perspectiva, um conjunto de símbolos e relações matemáticas que procura traduzir, de alguma forma, um fenômeno em questão ou problema da situação real". Além dessa aplicação, a modelagem matemática é considerada uma estratégia de ensino, por se tratar de uma metodologia diferenciada para o ensino da matemática. Essa temática constitui-se de forma abrengente e pode trazer significativas contribuições para a pesquisa em educação matemática.

O enfoque do ensino da matemática envolve uma perspectiva com propriedades e atribuições na qual os alunos não conseguem assimilar à realidade todo o conhecimento passado pelo professor. Perpassando por essa ideia, Cunha (2020) considera que em todos os seus anos de experiências, em diversos níveis de ensino, sempre buscou estratégias de ensino que possibilitassem a aplicação da matemática junto à realidade. Sendo assim, o desempenho dos alunos está associado a uma boa prática pedagógica, não a um ensino superficial sem garantia de aprendizagem.

Ainda nesse enfoque, a BNCC, Brasil (2018, p. 16), ressalta a importância na sala de aula, em "Contextualizar os conteúdos dos componentes curriculares, identificando estratégias para apresentá-los, representá-los, exemplificá-los, conectá-los e torná-los significativos, com base na realidade do lugar e do tempo nos quais as aprendizagens estão situadas". Porém, verifica-se, via de regra, que o processo de ensino e aprendizagem da matemática nas salas de aulas ainda se revela como voltado para o desenvolvimento de cálculos matemáticos e aplicação de fórmulas, sem que exista uma efetiva preocupação em relacionar os conteúdos aplicados com a real utilização destes conceitos. Assim, questiona-se se a aplicação da modelagem matemática no ensino pode contribuir para melhorar a aprendizagem dos alunos para que sejam capazes de visualizar a matemática fora da sala de aula.

Portanto, pode-se considerar que o ensino da matemática engloba não só um saber matemático, mas um empenho didático, onde o professor permite aos alunos um contato direto com a matemática, proporcionando a si própria a chance de aprimorar sua metodologia visando o novo. Nessa ideia D'Ambrósio (2009, p. 98) afirma que "Uma das coisas mais notáveis em relação à atualização e ao aprimoramento de métodos é que não há uma receita. Tudo que se passa na sala de aula vai depender dos alunos e do professor, de seus conhecimentos matemáticos e, principalmente, do interesse de grupos." Não há procedimentos estimáveis para que os professores sigam, há apenas valores e princípios que devem ser mantidos, sujeitando-se à novas concepções pedagógicas, convidando os alunos a conviverem com a matemática e ampliando o caminho para sua importância.

1.1 Justificativa

Considerando os aspectos contribuintes para um melhor ensino de matemática, a modelagem matemática como uma estratégia de ensino é considerada uma solução eficaz que contribui de forma significativa na aprendizagem dos alunos. De acordo com Brandt, Burak e Kluber, (2016, p. 06) "A Modelagem Matemática se coloca como alternativa metodológica que traz para a sala de aula os problemas da vida real e da cultura dos alunos para dialogarem com conhecimento universal, lógico e válido em todos os tempos e lugares da Matemática", entendendo que a matemática está muito além de teorias e números, engloba também os aspectos diários vividos pelos alunos, o meio em que ele está inserido, permitindo-os veem a matemática concreta aplicados no dia a dia.

Por outro lado, segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), Brasil (2018, p. 17), deve-se "selecionar e aplicar metodologias e estratégias didático-pedagógicas diversificadas, recorrendo a ritmos diferenciados e a conteúdos complementares [...]", proporcionando novas experiências aos alunos em sala de aula com metodologias que contribuem para que os alunos estejam sempre ativos no seu processo de aprendizado.

Além disso, mediante a contextualização sobre a abordagem do ensino da Matemática, percebemos a frequente indagação dos alunos ao professor sobre a aplicabilidade dos conteúdos estudados, o motivo pelo qual estão estudando e como esses conhecimentos serão úteis em suas vidas. Essas dúvidas muitas vezes levam os alunos a considerarem a Matemática como uma disciplina sem utilidade prática ou a sentirem dificuldade em se adaptar à metodologia utilizada pelo professor em sala de aula.

Observando esses aspectos, o objetivo deste trabalho é apresentar o ensino de funções quadráticas no ensino médio por meio da modelagem matemática, como uma metodologia alternativa. A proposta é despertar o interesse dos alunos, proporcionando uma compreensão mais significativa dos conceitos estudados, buscando estabelecer uma conexão direta entre a teoria matemática e a sua relevância para a vida dos alunos, tornando o aprendizado mais envolvente e significativo.

A escolha da temática deste trabalho está relacionada ao habitual dentro da sala de aula, onde o professor dá ênfase às teorias e aplicações de fórmulas não relacionando essa teoria com o mundo real. Sendo assim, a modelagem matemática como uma metodologia alternativa de ensino, irá proporcionar ao aluno um momento de interação com a realidade que o cerca, incentivando-o ao pensamento crítico, ao raciocínio lógico e a inovação, com essa temática pautada especificamente para o ensino de função quadrática.

Foi escolhido como local para execução desta pesquisa o Instituto Federal do Amapá, na turma do 1° ano do Ensino Médio na forma integrada, do curso Técnico em Redes de Computadores, por conter em seu Plano Político Pedagógico o estudo do conteúdo base para esta aplicação. É importante ressaltar que a escolha deste curso não foi uma preferência específica, uma vez que o único critério estabelecido era que a função quadrática fizesse parte do conteúdo programático do curso.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo Geral

- Aplicar a modelagem matemática no ensino de função quadrática como metodologia alternativa;
-

1.2.2 Objetivos Específicos

- Analisar os resultados da aplicação da metodologia da modelagem matemática no ensino e aprendizagem da função quadrática, enfatizando a importância da matemática como processo de formação dos alunos;
- Proporcionar aos alunos uma compreensão mais significativa dos conceitos matemáticos estudados;

- Relacionar o conteúdo estudado e sua relevância com a realidade do aluno;
- Estimular o interesse, raciocínio lógico e a criatividade em matemática;
- Desenvolver as habilidades e competências segundo a BNCC.

2 MODELAGEM MATEMÁTICA

A modelagem matemática não é um tema inédito nem pouco conhecido, desenvolvido e trabalhado, desde muito tempo vem sendo discutido, aprimorado e aplicado nas problemáticas da realidade. É considerada para Biembengut e Hein (2023) não uma ideia nova, mas algo que se constituiu desde teorias científicas e matemáticas, perpassando para traduzir situações-problemas à linguagem matemática tendo potencial de auxiliar na hipótese de fatos, além disso, sendo capaz servir não somente para uma solução particular, podendo também orientar e servir como base para outras teorias e aplicações. Bertone, Bassanezi e Jafelice (2014, p. 09) dizem que, "A modelagem é o processo de criação de modelos onde estão definidas as estratégias de ação sobre a realidade carregada de interpretações e subjetividades próprias de cada modelador".

Entre as variadas perspectivas, a modelagem matemática é vista como uma grande fonte de conhecimentos, tomada de decisões e explicação para o mundo abstrato, que para Burak (1992, p. 62) "constitui-se em um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer predições e a tomar decisões".

Entre vários contextos, a matemática faz-se presente no cotidiano, mesmo não sendo percebida, está contida em vários elementos estabelecidos no dia a dia da sociedade, como por exemplo, crescimento populacional e alastramento de doenças, englobando uma perspectiva de dados que possuem extrema importância. Seguindo o pensamento sobre a temática, Bassanezi (2002, p.17) considera que "A modelagem matemática, em seus vários aspectos, é um processo que alia teoria e prática, motiva seu usuário na procura do entendimento da realidade que o cerca e na busca de meios para agir sobre ela e transformá-la." São processos que contribuem de forma significativa diariamente, criando ou aperfeiçoando o que é utilizado.

Com análise em grandes pesquisas e trabalhos, a modelagem matemática como uma metodologia e estratégia no ensino está sendo cada dia mais elaborada, visando melhorias na educação e na aprendizagem matemática, apresentando possíveis resultados e contribuições para que os alunos consigam aprimorar seus conhecimentos e desenvolvimentos, tendo em vista sua ampla visão no cotidiano. Para Bassanezi (2002, p. 16) "Nessa nova forma de encarar a matemática, a modelagem - que pode ser tomada tanto como um método científico de pesquisa quanto como uma estratégia de ensino-aprendizagem - tem se mostrado muito eficaz", agregando as técnicas para a transformação de conceitos, fazendo a transição da linguagem matemática para a do mundo real.

É de extrema importância destacar a modelagem matemática e as suas contribuições tanto no processo de ensino quanto na apresentação de teorias e possíveis estratégias envolvendo acontecimentos. Contudo, atribuir a modelagem matemática ao ensino-aprendizagem é um dos desafios vigentes, considerando as dificuldades dos alunos e pela própria matemática ter se tornado inimiga de muitos estudantes. Contribuindo com esta ideia, Ribeiro (2008, p.65) diz que a modelagem apresentada com seus vários aspetos “podem ampliar a competência crítica dos sujeitos envolvidos”.

2.1 Etapas da Modelagem Matemática

Como a modelagem é o processamento de uma problemática da realidade transformada para a linguagem matemática, nessa ideia Biembengut e Hein (2023, p. 20) descrevem o processo da modelagem constituído por três etapas, sendo eles: Interação, Matematização e o Modelo Matemático.

A interação é a fase inicial do processo, o qual ocorre o reconhecimento da situação-problema e reconhecimento do assunto que fará parte desse processo. Nessa fase inicial é necessário um estudo sobre o conteúdo a ser desenvolvido no decorrer do processo da modelagem.

No ensino, esta etapa é o momento, como o próprio nome já diz, de interação entre os alunos e o tema, com o professor levando-os a discutir sobre a temática escolhida incentivando-os a pensar sobre e daí formularem seus questionamentos.

A matematização é a formulação do problema em hipótese e a resolução deste. É considerada a fase mais difícil de todo o processo da modelagem matemática, pois é nessa fase que é feita a transformação da situação-problema em linguagem matemática. É subdividido em Formulação do Problema e Resolução do Problema, com a primeira levando a um esquema matemático, seja alguma fórmula, equação algébrica, gráfico, alguma representação matemática cabível à problematização. Já a Resolução do Problema é a adequação ao conteúdo proposto.

Em relação ao ensino é pautada nessa etapa o estímulo ao pensamento lógico matemático, aos quais os alunos criam hipóteses sobre a resolução do problema, apresentando uma possível resposta até chegar a uma melhoria, com o professor sempre incentivando-os a pensar e motivando-os por meio de modelos matemáticos existentes e também propondo a resolução de exercícios como auxílio para suas possíveis respostas.

O Modelo Matemático é a interpretação da solução e a comprovação do modelo. É a etapa final que tratará da validação do modelo matemático apresentado. É necessária uma avaliação para analisar se o modelo encontrado é passível para a situação-problema, se o modelo encontrado é confiável, contornando assim da linguagem matemática para o problema inicial, sendo esse caso a validação.

Essa última fase voltada para o ensino, é onde os alunos irão também analisar o resultado encontrado como validação e assim, destacar a importância do modelo, se podem melhorar o resultado obtido.

Barbosa (2004) declara que a modelagem é um aspecto de aprendizagem ao qual os alunos são convidados a interagir com a realidade por meio da problematização e investigação, com situações referentes ao mundo real, visando a participação dos alunos no processo de aprendizagem, cada vez mais permitindo essa interação, estímulo e pensamento fora da sala de aula.

Como base para as etapas de interação, matematização e modelo matemático, da modelagem matemática, apresentamos a seguir a fundamentação teórica necessária para o ensino da função quadrática no ensino médio.

3 FUNÇÃO QUADRÁTICA

3.1 Definição

Denomina-se função quadrática, qualquer função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida pela lei de associação $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são números reais (com $a \neq 0$), denominados de coeficientes.

Veja alguns exemplos de função quadrática e seus respectivos coeficientes:

- ✓ $f(x) = 3x^2 - 4x + 1 \Rightarrow a = 3,\ b = -4\ e\ c = 1$
- ✓ $f(x) = x^2 - 1 \Rightarrow a = 1, b = 0\ e\ c = -1;$
- ✓ $f(x) = -x^2 + 8x \Rightarrow a = -1, b = 8\ e\ c = 0;$
- ✓ $f(x) = -4x^2 \Rightarrow a = -4, b = 0\ e\ c = 0;$
- ✓ $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{8}x \Rightarrow a = \frac{-3}{4}, b = \frac{5}{8}\ e\ c = 0.$

3.2 Gráfico

O gráfico de uma função quadrática é uma parábola. Como exemplo inicial, a construção do gráfico da função $f(x) = x^2 - 5x + 6$. Para melhor visualizar o gráfico (a parábola) dessa função, foram utilizados os mesmos valores habituais para x (utilizados na função afim: 0, 1, 2, 3, 4 e 5), ou quaisquer outros, uma vez que a função quadrática é também definida para todo o conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$). Neste exemplo específico, e com o objetivo de visualizar a sua curvatura pretendida, foram utilizados os valores na tabela abaixo:

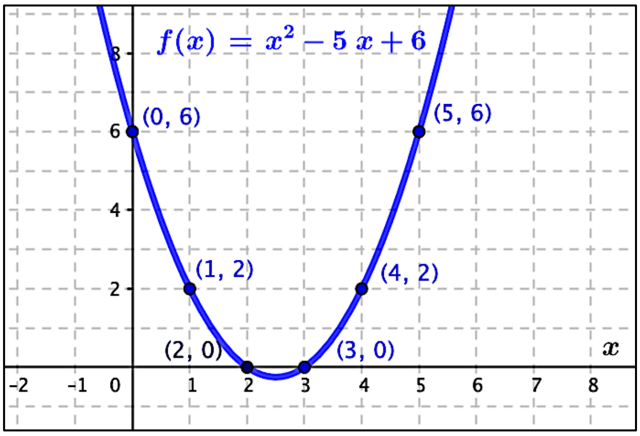
Tabela 1 - Curvatura.

x	$x^2 - 5x + 6$	y
0	$0^2 - 5.0 + 6$	6
1	$1^2 - 5.1 + 6 = 1 - 5 + 6$	2
2	$2^2 - 5.2 + 6 = 4 - 10 + 6$	0
3	$3^2 - 5.3 + 6 = 9 - 15 + 6$	0
4	$4^2 - 5.4 + 6 = 16 - 20 + 6$	2
5	$5^2 - 5.5 + 6 = 25 - 25 + 6$	6

Fonte: Próprios Autores, 2023.

O gráfico:

Figura 1 - Curvatura.



Fonte: Próprios Autores, 2023.

Observação: Após todos os pontos postos no plano cartesiano, traceja-se a curvatura sobre eles. Este procedimento é devido a função ser definida em todos os reais (ℝ) e não somente nos valores utilizados na tabela.

Outro exemplo: construir o gráfico da função $f(x) = -x^2 - 2x$.

Solução: Atribuindo os mesmos valores habituais para x: -2, -1, 0, 1, 2, tem-se:

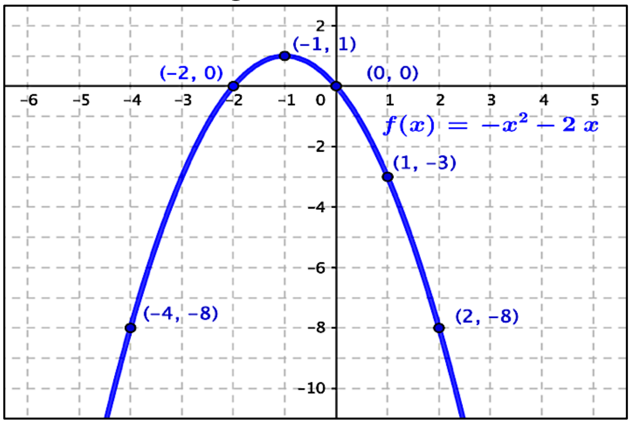
Tabela 2 - Pontos do gráfico.

x	$-x^2 - 2x$	y
-2	$-(-2)^2 - 2.(-2) = -4 + 4$	0
-1	$-(-1)^2 - 2.(-1) = -1 + 2$	1
0	$-0^2 - 2.0 = 0 + 0$	0
1	$-1^2 - 2.1 = -1 - 2$	-3
2	$-2^2 - 2.2 = -4 - 4$	-8
-4	$-(-4)^2 - 2.(-4) = -16 + 8$	-8

Fonte: Próprios Autores, 2023.

Observação: A última linha da tabela acima foi calculada apenas para visualizar a curvatura característica da parábola por completo.

Figura 2 - Gráfico.



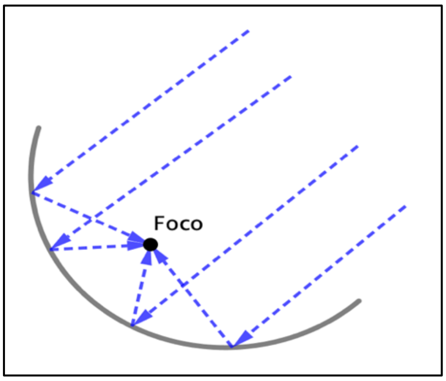
Fonte: Próprios Autores. 2023.

A parábola caracterizada no gráfico dos exemplos anteriores, está presente no cotidiano e possui importantes aplicações. Entre as aplicações pode citar-se a propriedade refletora, o foco e a altura máxima, cujas ilustrações estão a seguir.

Figura 3 - Antena Parabólica.

Fonte: Pixabay.com, 2023.

Figura 4 - Ilustração da recepção de sinal de uma antena parabólica.



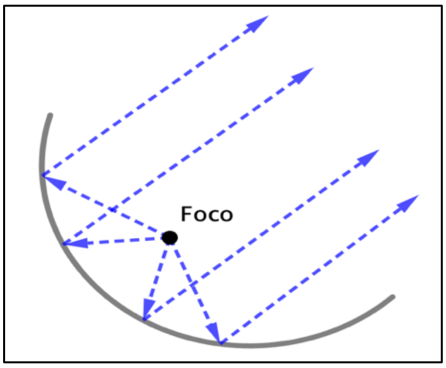
Fonte: Próprios Autores, 2023.

As antenas parabólicas possuem elevada capacidade de recepção de sinal devido a concentração de diversos sinais (ondas eletromagnéticas) em um único ponto (no foco do paraboloide).

Figura 5 - Lanterna.

Fonte: Próprios Autores, 2023.

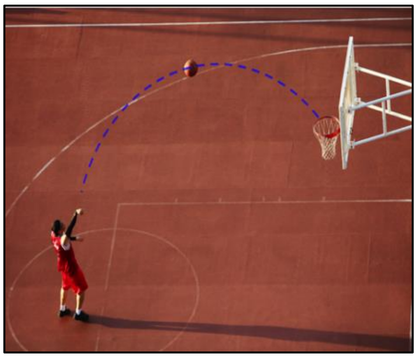
Figura 6 - Ilustração da emissão de luz por lanterna.



Fonte: Próprios Autores, 2023.

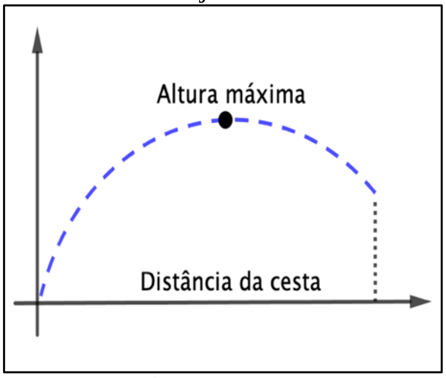
Os raios de luz emitidos pela lâmpada (que está no foco) são refletidos pela curvatura espelhada em forma de paraboloide presente na lanterna, aumentando assim, a intensidade de luz.

Figura 7 - Trajetória do arremesso de uma bola de basquete.



Fonte: Pixabay.com (imagem adaptada), 2023.

Figura 8 - Gráfico da trajetória da bola de basquete.



Fonte: Próprios Autores, 2023.

A trajetória de uma bola de basquete em direção à cesta, pode ser descrita por uma parábola.

Algumas características da parábola podem ser verificadas antecipadamente, sem a necessidade da construção do gráfico, como é o caso da concavidade anunciada no teorema a seguir.

Teorema 3.2.1 Seja uma função quadrática $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, então:

- Se $a > 0$ (positivo), a parábola tem a concavidade voltada para cima:

Figura 9 - Concavidade para cima.

Fonte: Próprios Autores, 2023.

- Se $a < 0$ (negativo), a parábola tem a concavidade voltada para baixo:

Figura 10 - Concavidade para baixo.

Fonte: Próprios Autores, 2023.

Verifique a veracidade desse teorema nos dois exemplos anteriores.

3.3 Zeros da função quadrática

Chamam-se zeros da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, os números reais x tais que $f(x) = 0$.

De outra forma, os zeros da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ são as soluções da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, que são dadas pela fórmula:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

Fazendo $\Delta = b^2 - 4ac$, temos:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}.$$

Como: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, usaremos a notação x' ("xis linha") e x'' ("xis duas linhas"), para diferenciar os dois possíveis zeros da função.

Demonstração:

$$ax^2 + bx + c = 0 \; (\times 4a)(\mathit{multiplicando\ tudo\ por\ } 4a)$$

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0 \; (\mathit{somando\ } b^2 \mathit{\ em\ ambos\ os\ membros})$$

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 = 0 + b^2 \;\; (\mathit{organizando\ o\ produto\ notável})$$

$$\underbrace{4a^2x^2 + 4abx + b^2}_{(2ax + b)^2} + 4ac = b^2 \Rightarrow$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac \quad \Rightarrow \quad \boxed{2ax + b = \pm\sqrt{\Delta}} \; (*)$$

Isolando x, encontramos:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}.$$

Os passos acima não só levam à demonstração da fórmula, como também mostram que é possível resolver uma equação do 2º grau sem o uso dela.

Teorema 3.3.1: A quantidade de zeros de uma função quadrática depende do valor obtido para o radicando Δ (letra grega: delta), chamado de discriminante, a saber:

- Quando Δ é positivo($\Delta > 0$), há dois zeros reais e distintos e a parábola intersecta o eixo x em dois pontos;
- Quando Δ é zero ($\Delta = 0$), há só um zero real e a parábola intersecta o eixo x em um único ponto;
- Quando Δ é negativo($\Delta < 0$), não há zeros e a parábola não intersecta o eixo x.

Demonstração: Analisando a equação (*), observa-se que para: $\Delta > 0$ há duas soluções, para $\Delta = 0$, uma única solução e para $\Delta < 0$, não existem soluções reais. O que demonstra o teorema.

Teorema 3.3.2: A parábola intersecta o eixo y somente em um ponto, cujo valor é o coeficiente c.

Demonstração: Para qualquer ponto sobre o eixo y, o valor de x é sempre zero. Então, sendo $f(x) = ax^2 + bx + c$, para $x = 0$, temos: $f(0) = a.0^2 + b.0 + c = c$.

1º exemplo: Calcular os zeros da função $f(x) = x^2 - 3x + 2$ e verificar outras informações com relação ao seu gráfico.

Solução: Fazendo $f(x) = 0$, tem-se: $0 = x^2 - 3x + 2$.

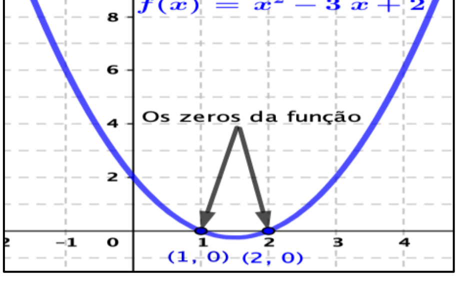
$$x^2 - 3x + 2 = 0 \; (a = 1, b = -3 \; e \; c = 2)$$

$$\Delta = b^2 - 4.a.c = (-3)^2 - 4.1.2 = 9 - 8 \Rightarrow \boxed{\Delta = 1}.$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2.1} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} x' = \dfrac{3 + 1}{2} = 2. \\ x'' = \dfrac{3 - 1}{2} = 1. \end{cases}$$

Como era de se esperar, veja na figura 11, que a parábola dessa função tem concavidade para cima, pois $a = 1 > 0$ (positivo), intersecta o eixo x em dois pontos de abscissas 1 e 2 (neste caso, porque $\Delta > 0$) e intersecta o eixo y no ponto $c = 2$.

Figura 11 - Parábola.



Fonte: Próprios Autores, 2023.

2º exemplo: Calcule os zeros da função $f(x) = x^2 - 6x + 9$.

Solução: Fazendo $f(x) = 0$, tem-se:

$0 = x^2 - 6x + 9$

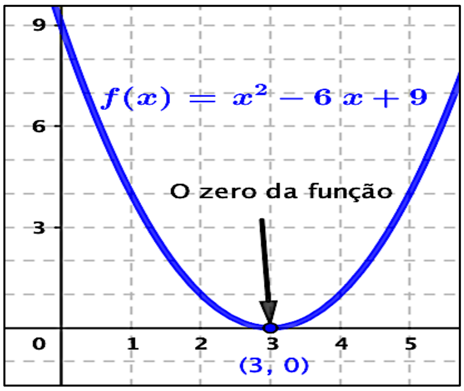
$x^2 - 6x + 9 = 0\ (a = 1, b = -6\ e\ c = 9)$

$\Delta = b^2 - 4.a.c = (-6)^2 - 4.1.9 = 36 - 36 \Rightarrow \boxed{\Delta = 0}$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{0}}{2.1} = \frac{6 \pm 0}{2} = \begin{cases} x' = \dfrac{6 + 0}{2} = 3. \\ x'' = \dfrac{6 - 0}{2} = 3. \end{cases}$$

Veja na figura 12 que a parábola tem concavidade para cima, pois $a = 1 > 0$ (positivo). Intersecta o eixo x em um único ponto $x = 3$ (neste caso, porque $\Delta = 0$) e intersecta o eixo y, em $c = 9$.

Figura 12 - $a = 1 > 0$.



Fonte: Próprios Autores, 2023.

3º exemplo: Calcule os zeros da função $f(x) = -3x^2 - 5x - 12$.

Solução: Fazendo $f(x) = 0$, tem-se:

$0 = -3x^2 - 5x - 12$.

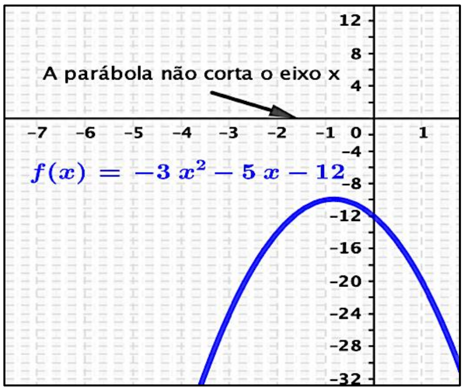
$-3x^2 - 5x - 12 = 0\ (a = -3, b = -5\ e\ c = -12)$

$\Delta = b^2 - 4.a.c = (-5)^2 - 4.(-3).(-12) = 25 - 144 \Rightarrow \boxed{\Delta = -119}$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{-119}}{2.(-3)}$$

Esse é o caso em que $\Delta < 0$. Como não existe raiz quadrada de número negativo em $\mathbb{R}$, a função não possui zeros reais e a parábola não intersecta o eixo x. Além disso, possui concavidade para baixo, pois $a = -3 < 0$ (negativo) e intersecta o eixo y, no ponto de ordenada c:(0, -12).

Figura 13 - $a = -3 < 0$.



Fonte: Próprios Autores, 2023.

3.4 Forma canônica e vértices

Definição 3.4.1: Denomina-se forma canônica, a função quadrática escrita na forma:

$$\boxed{y = a(x - x_v)^2 + y_v} +$$

onde:

$$\boxed{x_v = -\frac{b}{2a}}$$

e:

$$\boxed{y_v = -\frac{\Delta}{4a}}.$$

O ponto $(x_v,\, y_v)$, calculado a partir da fórmula acima, é denominado de vértice da parábola.

Teorema 3.4.1: O vértice da parábola é o ponto cujo valor da função é máximo ou mínimo.

Demonstração:

$y = ax^2 + bx + c \;\; (\times 4a)(\textit{multiplicando tudo por } 4a)$

$4ay = 4a^2x^2 + 4abx + 4ac \; (\textit{somando } b^2 \textit{ em ambos os membros})$

$4ay + b^2 = 4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 (\textit{organizando o produto notável})$

$4ay + b^2 = \underbrace{4a^2x^2 + 4abx + b^2}_{(2ax+b)^2} + 4ac \;= (2ax + b)^2 + 4ac - b^2$

$$y = \frac{(2ax + b)^2}{4a} - \frac{\Delta}{4a} = \frac{a(2ax + b)^2}{4a^2} - \frac{\Delta}{4a} \;\Rightarrow$$

$$y = a\left(x - \underbrace{\left(\frac{-b}{2a}\right)}_{x_v}\right)^2 + \underbrace{\left(-\frac{\Delta}{4a}\right)}_{y_v} \Rightarrow \boxed{y = a(x - x_v)^2 + y_v} \quad (1).$$

A forma canônica acima, demonstra de forma analítica, o máximo ou o mínimo de y e que o seu valor depende da expressão $(x - x_v)^2$ e do coeficiente a. Veja:

Para $a > 0$ (positivo), o valor de $y = \overbrace{\underbrace{a}_{+}\underbrace{(x - x_v)^2}_{+}}^{acréscimo} + y_v$ será mínimo quando $x = x_v$ e a concavidade da parábola será para cima, basta observar os acréscimos sempre positivos.

Para $a < 0$ (negativo), o valor de $y = \overbrace{\underbrace{a}_{-}\underbrace{(x - x_v)^2}_{+}}^{acréscimo} + y_v$ será máximo quando $x = x_v$ e a concavidade da parábola será para baixo, basta observar os acréscimos sempre negativos.

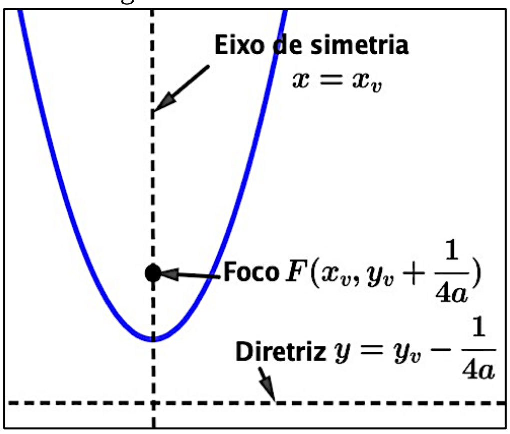
Por outro lado, isolando o valor de x em (1), tem-se:

$$x = x_v \pm \sqrt{\frac{y - y_v}{a}}. \quad (2)$$

Para $y \neq y_v$, existem dois valores de x que são simétricos (ou equidistantes) a x_v, o que demonstra o eixo de simetria da parábola em torno de x_v.

Por fim, se $a > 0$ em (2), implica em $y > y_v$. Assim, no caso de $x > x_v$, temos função crescente e caso, $x < x_v$, temos função decrescente. De forma análoga, demonstra-se para $a < 0$.

Figura 14 - Forma canônica.



Fonte: Próprios Autores, 2023.

Uma vez demonstradas todas as informações, resume-se:

Nos casos em que $a > 0$, tem-se:

- A função é decrescente para $x < x_v$ e crescente para $x > x_v$;
- Se $\Delta > 0$, a função $f(x)$ é positiva em qualquer intervalo e negativa somente entre os

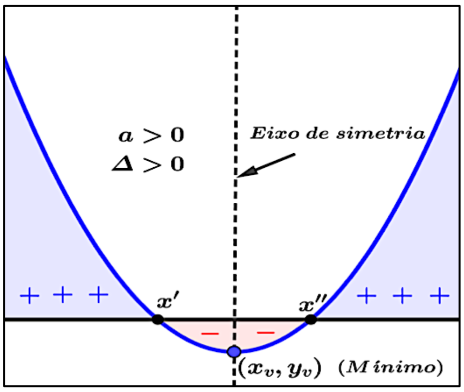
zeros da função ($x'\ e\ x''$) – ver figura 15;

- Se $\Delta = 0$, a função $f(x)$ é positiva em qualquer intervalo e igual a zero somente no zero da função ($x' = x''$) – ver figura 16;
- Se $\Delta < 0$, a função $f(x)$ é positiva em qualquer intervalo (não existe zeros da função) – ver figura 17.

Nos casos em que $a < 0$, tem-se:

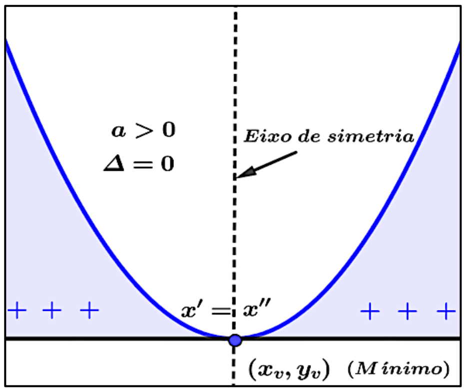
- A função é decrescente para $x > x_v$ e crescente para $x < x_v$;
- Se $\Delta > 0$, a função $f(x)$ é negativa em qualquer intervalo e positiva somente entre os zeros da função ($x'\ e\ x''$) – ver figura 18;
- Se $\Delta = 0$, a função $f(x)$ é negativa em qualquer intervalo e igual a zero somente no zero da função ($x' = x''$) – ver figura 19;
- Se $\Delta < 0$, a função $f(x)$ é negativa em qualquer intervalo (não existe zeros da função) – ver figura 20.

Figura 15 - $\Delta > 0$.



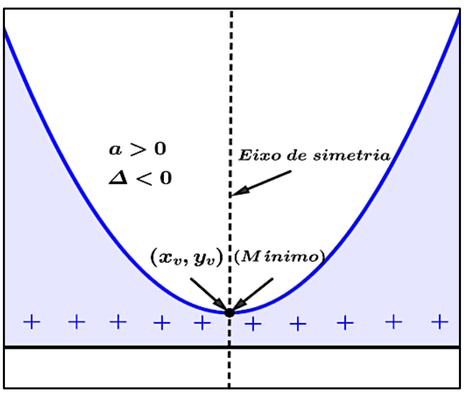
Fonte: Próprios Autores, 2023.

Figura 16 - $\Delta = 0$.



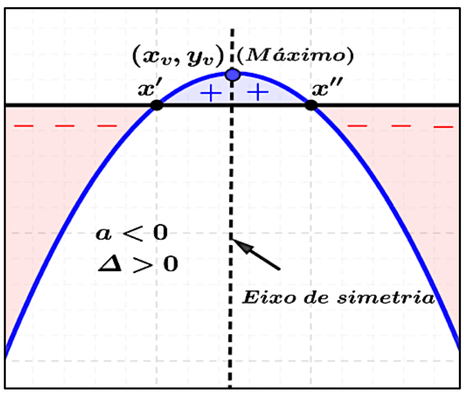
Fonte: Próprios Autores, 2023.

Figura 17 - $\Delta < 0$.



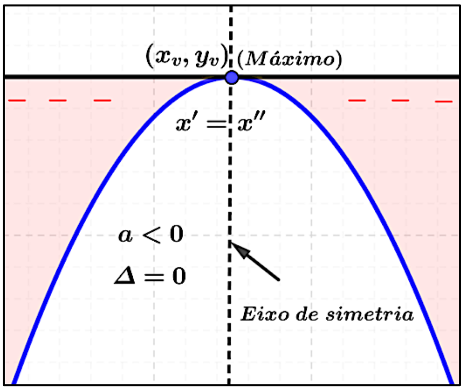
Fonte: Próprios Autores, 2023.

Figura 18 - ($x'\ e\ x''$).



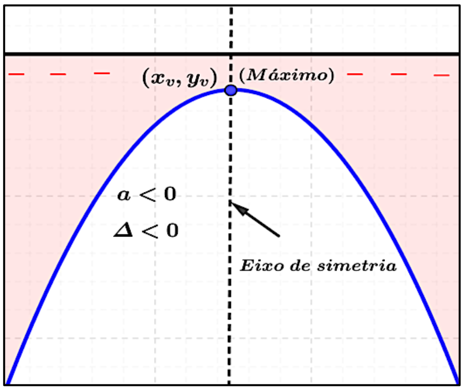
Fonte: Próprios Autores, 2023.

Figura 19 - $(x' = x'')$.



Fonte: Próprios Autores, 2023.

Figura 20 - Não existe zeros da função.



Fonte: Próprios Autores, 2023.

1º Exemplo: Seja a função $g(x) = (x-4)^2 - 1$.

a) Quais as coordenadas do ponto mínimo da função?

Solução: Desenvolvendo a função, tem-se:

$$(x-4)^2 - 1 = (x^2 - 8x + 16) - 1 = x^2 - 8x + 15.$$

Desta forma:

$$g(x) = x^2 - 8x + 15 \Rightarrow a = 1, b = -8 \; e \; c = 15.$$

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-8)}{2.1} = 4.$$

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(b^2 - 4.a.c)}{4a} = \frac{-((-8)^2 - 4.1.15)}{4.1} = \frac{-(64-60)}{4} = -1.$$

Resposta: $\boxed{(4,-1)}$.

Observação: A função $g(x) = (x-4)^2 - 1$, está na forma canônica, portanto é possível obter imediatamente o x_v e o y_v: $g(x) = (\underbrace{x-4}_{\substack{x-4=0 \\ x_v=4}})^2 \underbrace{-1}_{Yv}$.

b) Qual o ponto em que a parábola intersecta o eixo y?

Solução: A parábola intersecta o eixo y sempre no ponto $(0, c)$, ou seja, em $(0,15)$.

c) Quais os zeros da função?

Solução: A forma canônica também nos fornece o cálculo dos zeros da função de forma direta, sem uso da fórmula:

$$g(x) = (x-4)^2 - 1 \Rightarrow 0 = (x-4)^2 - 1 \Rightarrow (x-4)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$x - 4 = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x' = 4 + 1 = 5. \\ x'' = 4 - 1 = 3. \end{cases}$$

Use a fórmula de cálculo dos zeros da função e confirme as informações.

d) Quais os intervalos de crescimento, decrescimento, para função positiva e função negativa?

Como a concavidade é para cima (a é positivo), tem-se:

- Função decrescente para $x < 4$;

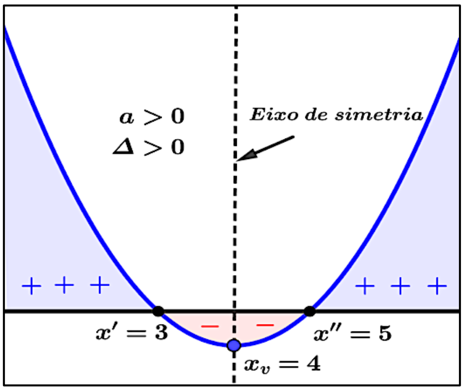
- Função crescente para $x > 4$;

- Função positiva para $x < 3$ e $x > 5$;

- Função negativa para $3 < x < 5$.

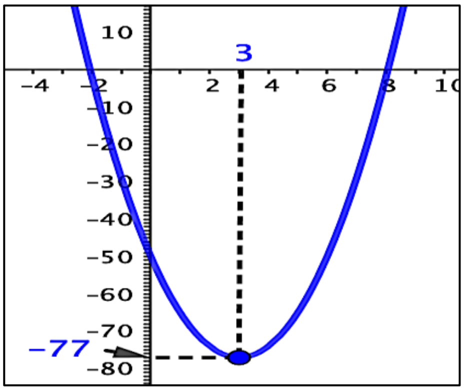
Conforme o gráfico dessa função na figura 21.

Figura 21 - a positivo.



Fonte: Próprios Autores, 2023.

Figura 22 - Solução.



Fonte: Próprios Autores, 2023.

2º exemplo: Sendo $y = 3x^2 - 18x - 50$, calcule o ponto mínimo da função.

Solução: Como $a = 3$, $b = -18$ e $c = -50$, tem-se:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-18)}{2.3} = \frac{18}{6} = 3$$

$$y_v = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-((-18)^2 - 4.3.(-50))}{4.3} \Rightarrow$$

$$y_v = \frac{-(324 + 600)}{12} = \frac{-924}{12} = -77$$

Resposta: $(3, -77)$. Conforme o gráfico dessa função na figura 22.

4 METODOLOGIA DE PESQUISA

A pesquisa é o primeiro passo para tudo o que se deseja construir. É fundamental para que um projeto seja iniciado, levantando hipóteses e teorias que possam ser constituídas ou não, estimulando o pensar e o fazer. Em consideração a isto, a natureza desta pesquisa é aplicada, com abordagem quantitativa, pois “No método quantitativo, é destacado a importância do teste de validade de uma hipótese a partir de experimentos [...].” Souza e Felipe (2021, p. 04). Para Marconi e Lakatos (2022, p. 125) “são instrumentos utilizados com a finalidade de obter dados que permitam medir o rendimento, a competência, a capacidade ou a conduta dos indivíduos, em forma quantitativa”.

É de caráter bibliográfico, por todo o embasamento que foi necessário para construção deste trabalho, tratando-se também de uma pesquisa de campo. Em respaldo a isso, D’Ambrósio (2009, p. 94) destaca, “Como consequência, podemos dizer que a pesquisa é algo intrínseco à prática e que não há muita relevância em uma pesquisa desvinculada da prática”.

4.1 Abordagem metodológica

O primeiro procedimento foi consultar os planos pedagógicos dos cursos de Ensino Médio oferecidos pelo IFAP a fim de verificar em qual curso e turma esse trabalho poderia ser aplicado. Após escolher a turma, de Redes de Computadores do 1º ano, fez-se em contato com a professora de Matemática responsável por essa turma, que concordou em informar sobre a conclusão do conteúdo de função quadrática, base principal para o desenvolvimento da pesquisa. De acordo com o plano pedagógico do curso, essa turma tem um total de 4h/a de matemática, divididas em dois dias, com duas horas de aula em cada dia, de acordo com os horários estabelecidos pelo setor pedagógico. Portanto, a aplicação deste trabalho ocorreu ao longo de quatro horas-aula, iniciando no dia 23 e finalizando no dia 24, terça e quarta-feira, respectivamente.

No dia 23 de maio, houve o primeiro contato com a turma. Nesse momento inicial, os pesquisadores e autores deste trabalho se apresentaram e explicaram o motivo da intervenção em sala de aula. Em seguida, realizou-se a primeira etapa do trabalho, que consistiu na aplicação de um diagnóstico (APÊNDICE A). O objetivo desse diagnóstico foi avaliar o nível de conhecimento dos alunos em relação ao conteúdo de função quadrática, pois, sem um entendimento adequado, descrito no tópico 3 deste trabalho, os alunos teriam dificuldade em compreender os exemplos e a aplicação da modelagem matemática.

Mesmo com o conteúdo abordado de forma geral pela professora da turma, ao longo do diagnóstico foi detectado a dificuldade e algumas dúvidas dos alunos sobre função quadrática. Os questionamentos do diagnóstico foram postos no slide, ao qual foram exibidos um de cada vez, com um tempo estimado para cada pergunta que seguia da resposta esperada também exibida. À medida que os questionamentos eram expostos, aguardou-se a resposta dos alunos como forma de avaliar, naquele momento, as dúvidas que tinham. Vale ressaltar que todas as perguntas do diagnóstico estavam embasadas nas atribuições da função quadrática precisas para os exemplos de aplicação.

Com base no diagnóstico, observou-se que os alunos não estavam confiantes com seus conhecimentos acerca da função quadrática, feito assim, uma breve revisão do assunto, sendo trabalhadas as dúvidas mais pertinentes e destacando os tópicos que seriam utilizados no decorrer dos exemplos, como pontos de máximos e mínimos, vértices da parábola, discriminante, entre outras questões técnicas intrínsecas ao conteúdo. Durante a breve revisão foram propostos alguns exemplos para fixação de cada item da função quadrática, respondendo aos questionamentos que surgiam conforme a abordagem. Após a explanação do conteúdo, foi apresentado brevemente a temática do trabalho, a modelagem matemática, e que apesar das dificuldades dos alunos no assunto, eles foram bem compreensivos, interativos e atenciosos, finalizando então o primeiro dia de aplicação.

Conforme planejado, no dia seguinte, dia 24, deu-se continuidade com a explicação de cada uma das etapas do processo da modelagem, envolvendo os alunos e estimulando-os a pensar sobre o que seria e como funcionava as fases da interação, matematização e modelo matemático, envolvendo também a apresentação dos exemplos de aplicação (descritos no item 4.2 deste trabalho). Em cada questão, foi solicitado aos alunos a leitura e interpretação do problema, compartilhando suas ideias e possíveis estratégias de resolução. Após a discussão dessas ideias, realizou-se a contextualização do problema, buscando estimular o pensamento crítico e a participação dos alunos na resolução, seguindo as etapas de interação, matematização e obtenção de modelos matemáticos, como preconizado na modelagem matemática. Durante o desenvolvimento da solução, os alunos conseguiram identificar facilmente as relações necessárias da função quadrática, sem enfrentar dificuldades significativas.

Para concluir o trabalho, no último momento, foi feita a solicitação para os alunos responderem ao questionário (APÊNDICE B), elaborado como uma pesquisa de avaliação, a fim de obter suas opiniões sobre a intervenção realizada, a modelagem matemática e ao ensino do conteúdo.

De maneira geral, os alunos foram muito participativos, sempre respondendo às perguntas e proporcionando uma experiência positiva em sala de aula, com suas contribuições também para o enriquecimento de nosso conhecimento e prática pedagógica.

4.2 Aplicação de modelos matemáticos a partir de situações reais

A seguir estão os exemplos de situações reais desenvolvidos juntos aos alunos (da escola-campo), enfatizando os passos da modelagem.

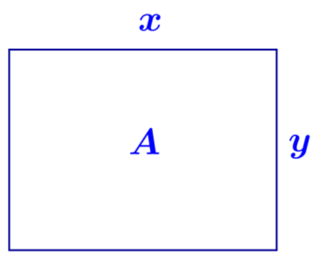
1º APLICAÇÃO: Um avicultor pretende cercar uma área retangular com 64m de arame entrelaçado. Que medidas precisa ter esse retângulo para que a área comporte o maior número de aves possível?

Etapa 1 - Interação (reconhecimento da situação-problema):

O que é área? Como se calcula a área de um retângulo? Existem áreas maiores e menores com a mesma quantidade de arame?

Solução: Denominando os lados do retângulo como x e y, tem-se:

Figura 23 - Área.



Fonte: Próprios Autores, 2023.

Etapa 2 - Matematização (transformação da situação-problema em linguagem matemática):

Para cercar área A precisamos de $2x + 2y$ metros de arame, ou seja, $2x + 2y = 64$, então $y = (64 - 2x)/2$.

A área do retângulo é dada por $A = x.y$, substituindo tem-se:

$A = x\,(64 - 2x)/2 \;\Rightarrow\; \boxed{A = 32x - x^2}$.

A área A é uma função quadrática com $a < 0$, portanto, possui concavidade para baixo, e um valor máximo.

Os coeficientes são: $a = -1, b = 32\ e\ c = 0$.

Pela fórmula do ponto do vértice, o x para que a área A seja máxima é:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-32}{2.(-1)} = 16$$

E como:

$$2x + 2y = 64 \Rightarrow 2.16 + 2y = 64 \Rightarrow$$

$$2y = 64 - 32 \Rightarrow 2y = 32 \Rightarrow \boxed{y = 16}.$$

Etapa 3 -Modelo matemático (validação do modelo matemático consoante a situação-problema):

Então, o retângulo que possui área máxima é um quadrado de lado 16.

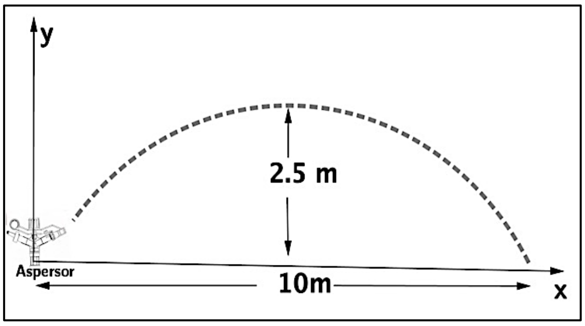
$A_{máx} = 16.16 = 256m^2$.

Que pode ser calculada também usando $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$

Faça os testes e perceba que de fato, $256m^2$ é a área máxima.

2º APLICAÇÃO: Um aspersor precisa atingir a distância máxima de 10 metros e altura máxima de 2,5 metros. Supondo sua instalação na origem de um sistema cartesiano (ver figura 24), qual a função quadrática que deve representar o jato d'agua desse aspersor?

Figura 24 - Aspersor.



Fonte: Próprios Autores, 2023.

Etapa 1 - Interação (reconhecimento da situação-problema):

A altura e a distância do jato são grandezas diretamente proporcionais? Por que a função quadrática é, em termos físicos, a função que melhor representa o jato de um aspersor?

Etapa 2 - Matematização (transformação da situação-problema em linguagem matemática):

Solução: De acordo com a figura $x_v = 5$, $y_v = 2,5$ e os zeros da função são respectivamente 0 (origem do sistema, $c = 0$) e 10 (distância máxima - toca o chão). Assim:

$$x_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow 5 = \frac{-b}{2a} \Rightarrow \boxed{b = -10a} \quad (1)$$

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(\mathrm{b}^2 - 4.a.0)}{4a} \Rightarrow y_v = \frac{-b^2}{4a} \Rightarrow \boxed{2{,}5 = \frac{-b^2}{4a}} (2)$$

Substituindo (1) em (2), tem-se:

$$2{,}5 = \frac{-(-10a)^2}{4a} \Rightarrow 2{,}5 = \frac{-100a^2}{4a} \Rightarrow 2{,}5 = -25a \Rightarrow a = \frac{2{,}5}{-25} \Rightarrow \boxed{a = -0{,}1}$$

De (1):

$$b = -10a \Rightarrow b = -10.(-0{,}1) \Rightarrow \boxed{b = 1}$$

Logo, o jato d'agua do aspersor dever ser representado pela função:

$$\boxed{f(x) = -0{,}1x^2 + x}$$

Etapa 3 -Modelo matemático (validação do modelo matemático consoante a situação-problema):

Faça os testes com as informações do problema e veja que a função $f(x) = -0{,}1x^2 + x$ é o modelo matemático que se ajusta ao jato.

3º APLICAÇÃO: Uma feirante vende em média 30kg de macaxeira por dia quando o valor do quilograma é R$5,00. Experiências anteriores mostram que a cada R$0,50 de desconto no preço, há um aumento nas vendas em 5kg por dia, acima da média. Qual deverá ser o preço do quilograma para que o valor das vendas dessa feirante seja máximo?

Etapa 1 - Interação (reconhecimento da situação-problema):

Qual seria o valor das vendas por dia para R$0,50 de desconto no preço? E R$1,00 de desconto no preço? Se conceder um desconto considerável o que acontece com o valor das vendas?

Etapa 2 - Matematização (transformação da situação-problema em linguagem matemática):

Solução: Denomina-se de x "a quantidade" de R$ 0,50 de descontos que terá o preço do quilograma. Assim, o preço do quilograma da macaxeira será de:

$$5 - 0{,}5x.$$

Por outro lado, a cada x vezes de desconto de R$ 0,50 no preço do quilograma, acarretará em um aumento nas vendas em 5kg por dia, acima da média, que é de 30kg. Logo, as vendas em quilogramas serão de:

$$30 + 5x.$$

O faturamento $f(x)$ é dado pelo produto do preço pela quantidade de quilogramas vendidos, então:

$$f(x) = (5 - 0{,}5x).(30 + 5x).$$

Desenvolvendo, encontra-se:

$$f(x) = 150 + 25x - 15x - 2{,}5x^2$$

$$\boxed{f(x) = -2{,}5x^2 + 10x + 150}.$$

Trata-se de uma função quadrática de coeficientes:

$$a = -2{,}5, b = 10 \ e \ c = 150.$$

A parábola que representa essa função possui concavidade para baixo, pois, $a = -2{,}5 < 0$. O que indica que, de fato, há um ponto de faturamento máximo e esse ponto, obviamente, é o vértice da parábola.

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-10}{2(-2{,}5)} = \frac{-10}{-5} \Rightarrow \boxed{x_v = 2}.$$

Isso significa que o feirante deve dar um desconto de $2 \times 0{,}5 = \text{R\$}1{,}00$ para que o faturamento nas vendas seja máximo. Esse faturamento pode ser encontrado, substituindo $x = 2$, na função:

$$f(x) = -2{,}5x^2 + 10x + 150$$

$$f(2) = -2{,}5.2^2 + 10.2 + 150$$

$$f(2) = -2{,}5.4 + 20 + 150$$

$$f(2) = -10 + 170 = 160 \ \Rightarrow \boxed{\text{R\$ } 160{,}00}.$$

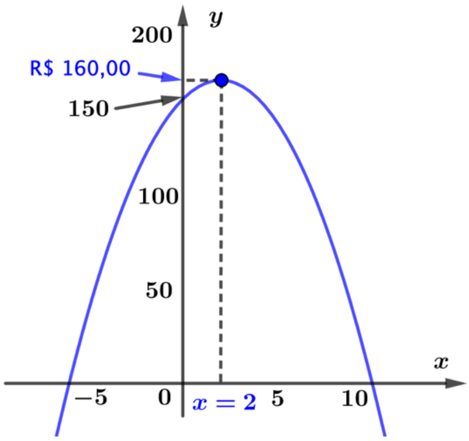
Ou se preferir, utilizando a fórmula de $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$.

Etapa 3 -Modelo matemático (validação do modelo matemático consoante a situação-problema):

Faça os testes da função quadrática encontrada com as simulações questionadas na interação do problema.

É interessante observar que, nessas circunstâncias, o feirante precisa dar desconto no preço do quilograma para maximizar o lucro, porém não pode exagerar nesse desconto. O gráfico da função do faturamento $f(x) = -2{,}5x^2 + 10x + 150$ a seguir, deixa claro essa observação.

Figura 25 - Gráfico da função do faturamento.



Fonte: Próprios Autores, 2023.

4º APLICAÇÃO: Segundo a Companhia Nacional de Abastecimento (CONAB), o Amapá produziu 2415, 2627 e 2771 toneladas de açaí, nos anos 2015, 2016 e 2017, respectivamente.

Fonte adaptada(www.conab.gov.br)

Para fins de projeção, considerou-se a função quadrática, como o modelo matemático que melhor se ajusta as informações.

a) Utilizando $x = 1$, $x = 2$ e $x = 3$, como os anos, respectivamente, de 2015, 2016 e 2017, qual a função quadrática que se ajusta aos dados?

b) Em que ano a produção de açaí será máxima e qual será a sua produção, segundo essa projeção (função)?

c) Construa o gráfico com essas informações.

Etapa 1 - Interação (reconhecimento da situação-problema):

Diante dos dados é possível considerar outras funções como modelo de matemático de ajuste? Qual a utilidade em se encontrar o modelo matemático adequado?

Etapa 2 - Matematização (transformação da situação-problema em linguagem matemática):

Solução:

a) Considerando essa função como sendo $y = ax^2 + bx + c$ e $x = 1$, $x = 2$ e $x = 3$ como sendo os anos, tem-se uma produção, respectivamente, de $y = 2415$, $y = 2627$ e $= 2771$ toneladas de açaí. Desse modo,

$$\begin{cases} 2415 = a.1^2 + b.1 + c \\ 2627 = a.2^2 + b.2 + c \\ 2771 = a.3^2 + b.3 + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 2415 \\ 4a + 2b + c = 2627 \\ 9a + 3b + c = 2771 \end{cases}$$

Subtraindo a 2ª equação pela 1ª, tem-se:

$$4a + 2b + c - (a + b + c) = 2627 - 2415$$

$$\boxed{3a + b = 212} \quad (1)$$

Subtraindo a 3ª equação pela 1ª, tem-se:

$$9a + 3b + c - (a + b + c) = 2771 - 2415$$

$$\boxed{8a + 2b = 356} \quad (2)$$

Montando o sistema com (1) e (2), dispõem-se de:

$$\begin{cases} 3a + b = 212 \\ 8a + 2b = 356 \end{cases}$$

Multiplicando a 1ª equação desse sistema por -2 e somando as duas equações, obtêm-se:

$$\begin{cases} -6a - 2b = -424 \\ 8a + 2b = 356 \end{cases} \Leftrightarrow 2a = -68 \Leftrightarrow a = -\frac{68}{2} \Leftrightarrow \boxed{a = -34}.$$

Substituindo $a = -34$ em (1):

$$3a + b = 212 \Leftrightarrow 3.(-34) + b = 212 \Leftrightarrow b = 212 + 102 \Leftrightarrow \boxed{b = 314}.$$

Substituindo $a = -34$ e $b = 314$ na 1ª equação do sistema inicial, encontra-se:

$$a + b + c = 2415 \Leftrightarrow -34 + 314 + c = 2415 \Leftrightarrow \boxed{c = 2135}.$$

Assim, o modelo matemático que melhor se ajusta aos dados, é:

$$\boxed{y = -34x^2 + 314x + 2135}.$$

b) A produção de açaí será máxima em:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-314}{2(-34)} \Rightarrow \boxed{x_v \cong 4{,}6}.$$

Isto é, entre $x = 4$ e $x = 5$, o que corresponde ao período entre 2018 e 2019.

E essa produção será, provavelmente, de:

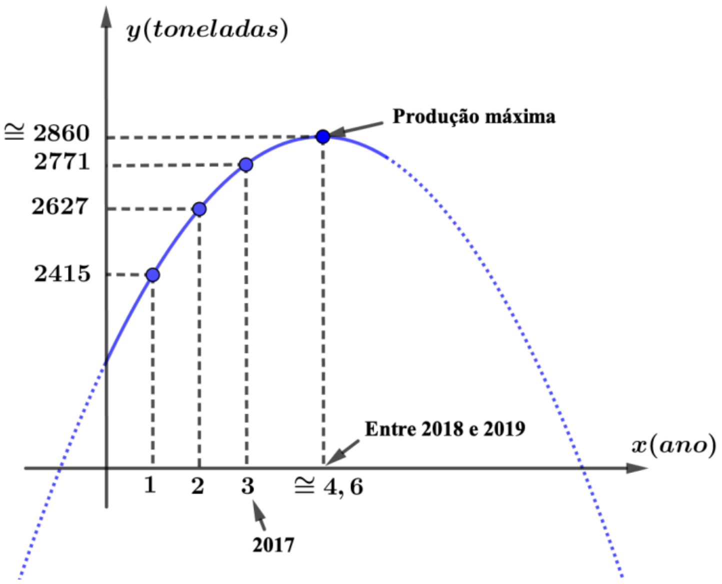
$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(314^2 - 4.(-34).2135)}{4.(-34)} \Rightarrow y_v = \frac{388956}{136} \Rightarrow \boxed{y_v \cong 2860 \text{ toneladas}}.$$

Etapa 3 -Modelo matemático (validação do modelo matemático consoante a situação-problema):

Faça os testes e veja que os dados do problema condizem com a função quadrática. O gráfico a seguir confirma a validação do modelo.

c)A produção de açaí será máxima em:

Figura 26 - Gráfico da produção máxima.

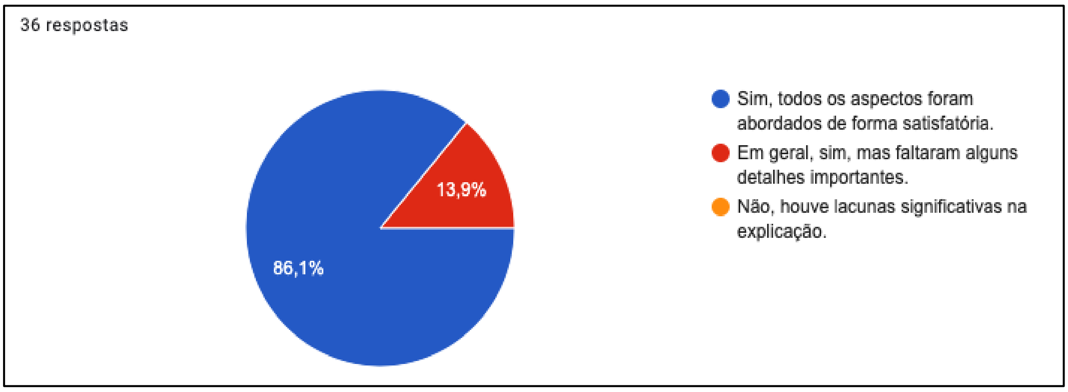


Fonte: Próprios Autores, 2023.

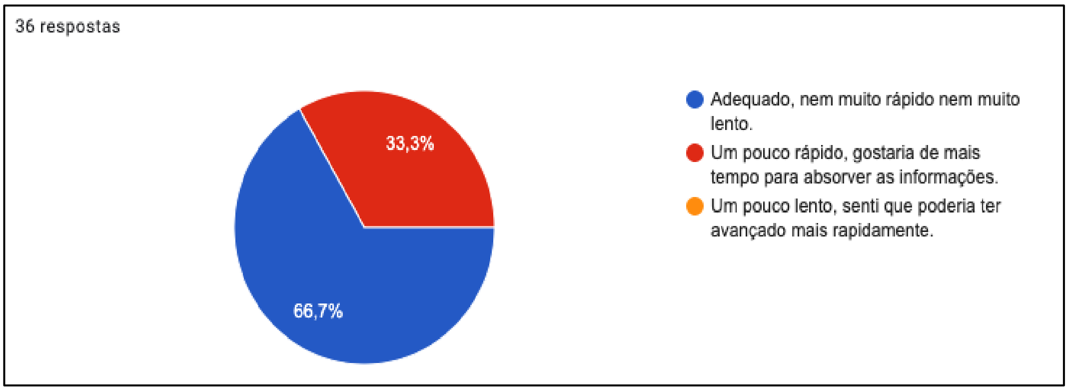
5 RESULTADOS E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Os gráficos a seguir são frutos de um questionário (APÊNDICE B) e traz um panorama da percepção dos alunos quanto ao conteúdo, a aplicação da modelagem matemática no ensino da função quadrática e suas abordagens.

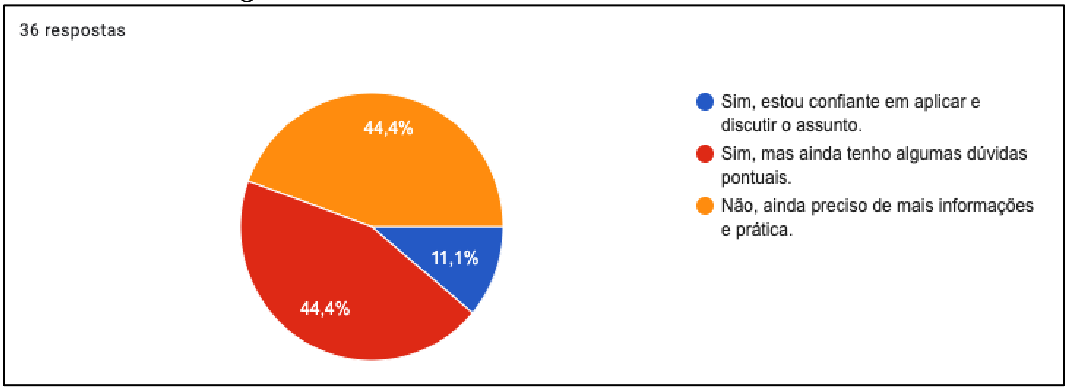
1 - Você sentiu que a explicação foi abrangente o suficiente para abordar todos os aspectos importantes do assunto?



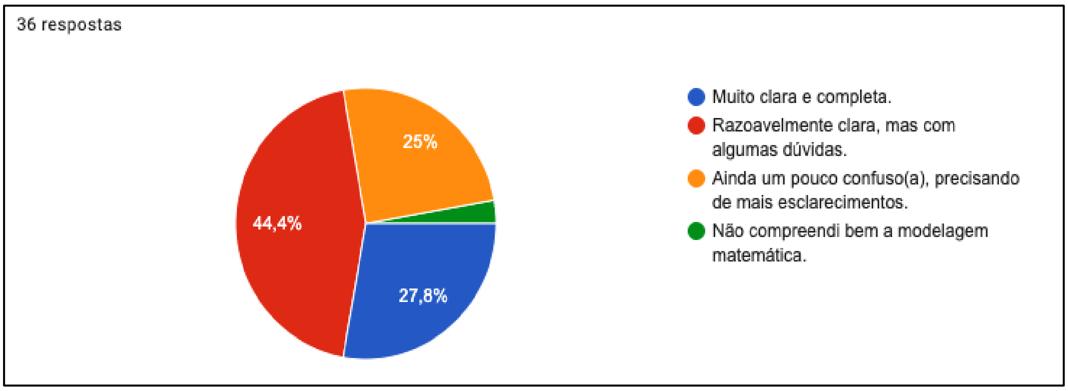
2 - Como você avaliaria o ritmo da explicação?



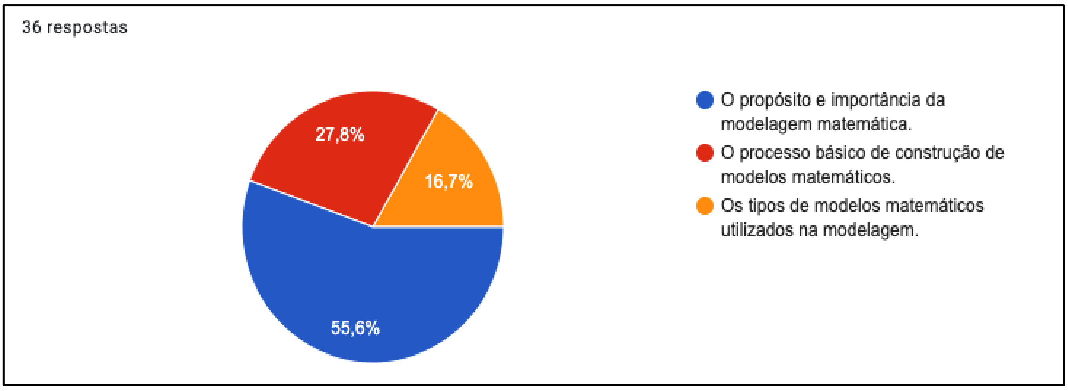
3 - Você sente que possui conhecimento suficiente sobre a função quadrática para aplicá-la ou discuti-la de forma significativa?



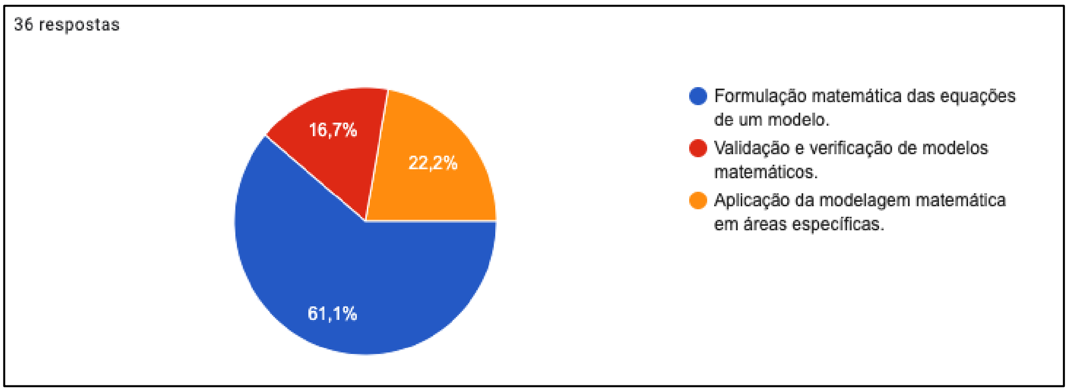
4 - Qual foi a sua compreensão geral da modelagem matemática após a explicação?



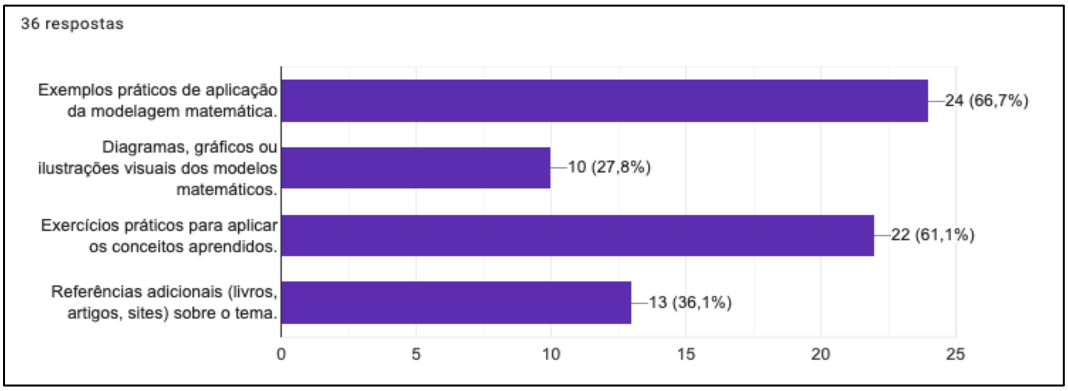
5 - Quais foram os principais aspectos da modelagem matemática que você considerou mais claros e fáceis de entender?



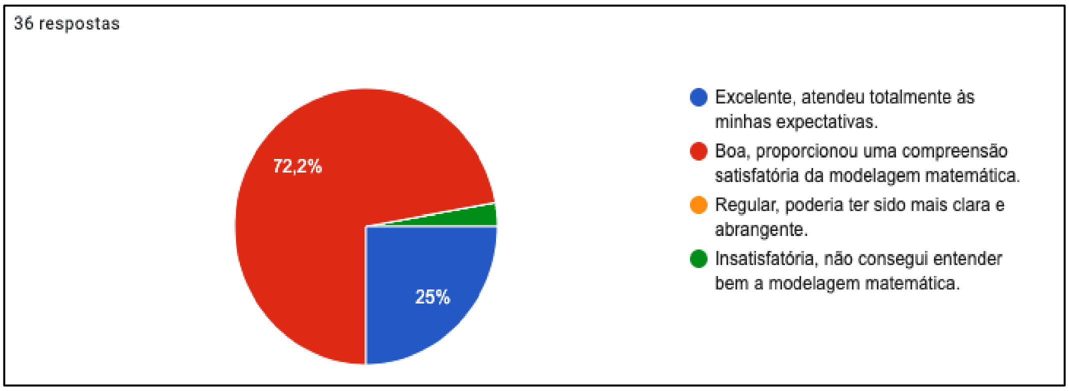
6 - Quais partes da modelagem matemática você achou mais desafiadoras ou difíceis de compreender?



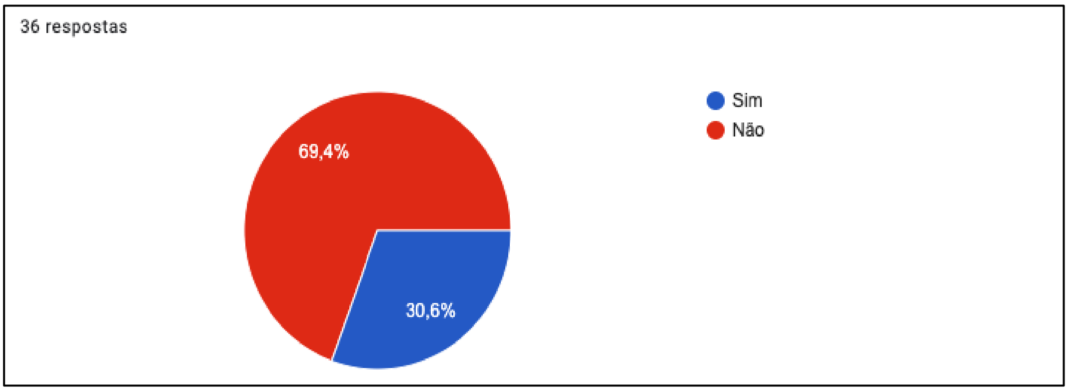
7 - Que tipo de recursos adicionais você gostaria de ter para ajudar na compreensão da modelagem matemática? (Marque todas as opções relevantes)



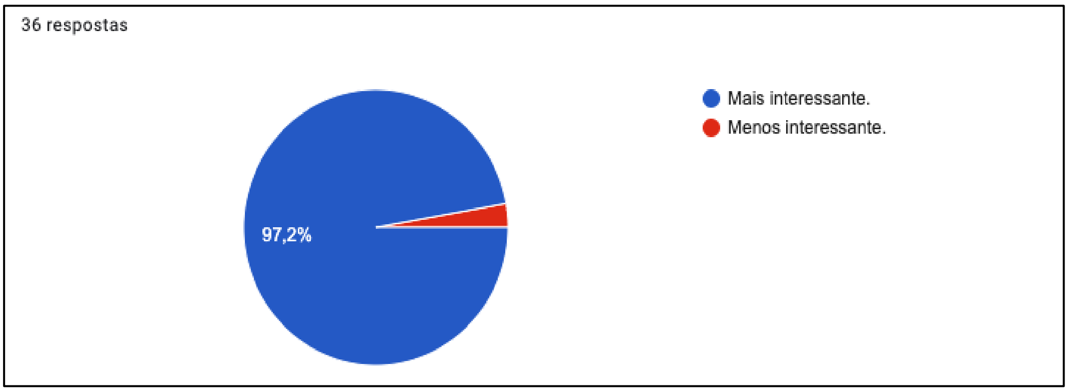
8 - Como você avaliaria a qualidade geral da explicação da modelagem matemática?



9 - Você já ouviu falar em modelagem matemática (busca de modelos matemáticos que se ajustam a problemas reais)?



10 - O conteúdo ficou mais ou menos interessante, após a intervenção e aplicação da modelagem matemática?



5.1 Análise dos Resultados

Analisando de forma geral os resultados obtidos no formulário de avaliação, pode-se descrever a dificuldade que os alunos sentem em compreender o conteúdo de função quadrática como um desafio no ensino e a forma como o professor faz a abordagem do assunto implica no conhecimento dos educandos. Bozan, Flores e Goi (2014, p. 09) consideram que “O estudo dessa função deve ser realizado de forma que o aluno consiga estabelecer as relações entre o aspecto do gráfico e os coeficientes de sua expressão algébrica, evitando-se a memorização de regras”. Com isso, é de grande importância inovar a prática docente, onde o professor utiliza estratégias de ensino como melhoria para a aprendizagem dos alunos.

Em relação ao ensino de matemática, a modelagem pode ser trabalhada em sala de aula como melhoria, sendo empregada como metodologia alternativa, que segundo Biembengut e Hein (2023, p. 29) “A condição necessária para o professor implementar modelagem no ensino – modelação – é ter audácia, grande desejo de modificar sua prática e disposição de conhecer e aprender, uma vez que essa proposta abre caminho para descobertas significativas”, com a modelagem matemática contribuindo e impactando positivamente tanto na prática pedagógica, como no aprendizado dos alunos.

Com base nas informações obtidas no formulário de avaliação, os alunos não conseguem ter uma perspectiva total, possuindo algumas dúvidas ou ainda precisando de mais informações para a prática, com a minoria confiante em aplicar e discutir o assunto. Com o ensino pautado exclusivamente na teoria em sala, os alunos não conseguem assimilar por completo o que é ensinado à realidade, vivenciada ou não. Bassanezi (2015, p. 11) considera “No ensino tradicional, o objeto de estudo se apresenta quase sempre bem delineado, obedecendo a uma sequência predeterminada com um objetivo final muito claro que, muitas vezes, nada mais é que ‘cumprir o programa da disciplina’!”.

Embora com 27,8% dos alunos tenham respondido “muito clara e completa”, 44,4% tenham respondido “razoavelmente clara, mas com algumas dúvidas” e 25% “ainda um pouco confuso (a), precisando de mais esclarecimentos” sobre a modelagem matemática, pode-se considerar que um único contato com essa temática não é o suficiente para dominá-la. Com base nessa ideia, Bassanezi (2015, p. 43) em sua perspectiva sobre as técnicas de modelagem destaca que, “Da mesma forma que só se aprende a jogar futebol, jogando, só se aprende modelagem, modelando!”. Considerando também que as fases da modelagem (formulação, validação e aplicação) requerem prática para uma boa compreensão. Não sendo impedimentos para aprimorar os conhecimentos sobre esse objeto de estudo.

Esse questionário mostrou que, embora a maioria dos alunos não tenham conhecimento suficiente sobre a função quadrática, não tenha ouvido falar em modelagem matemática, é relevante seu propósito e importância, que proporcionou uma compreensão e interação satisfatória sobre essa temática e considerou o conteúdo de função quadrática abordado com a modelagem, mais interessante.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Partindo do pressuposto de trazer alguns indicativos para os saberes do professor com relação ao ensino-aprendizagem, este estudo pautou-se na metodologia do uso de modelagem matemática para mesclar assuntos ministrados em sala de aula com o cotidiano do aluno para o melhor entendimento. Segundo as Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Paraná-DCE (2008, p. 48), “Pela Educação Matemática, almeja-se um ensino que possibilite aos estudantes análises, discussões, conjecturas, apropriação de conceitos e formulação de ideias”.

A modelagem matemática como metodologia alternativa tem grande contribuição para o processo de ensino e aprendizagem, pois proporciona aos discentes a aplicação e o contato com a matemática no dia a dia, envolvendo também o estímulo e a eficácia no raciocínio lógico. Neste sentido, Bassanezi (2009, p. 38) considera que, “Com a modelagem o processo de ensino-aprendizagem não mais se dá no sentido único do professor para o aluno, mas como resultado da interação do aluno com seu ambiente natural”.

Apesar dos desafios inerentes a qualquer metodologia alternativa de ensino, a modelagem matemática e suas diferentes etapas, aplicada à função quadrática do ensino médio, demonstrou resultados significativos para a aprendizagem dos alunos, considerando que “grupos de alunos orientados e estimulados pelo professor desenvolvem as atividades”, Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 25). A conexão com situações do cotidiano e a aplicação prática dos conceitos matemáticos ajudaram a tornar a Matemática mais relevante e interessante para os estudantes.

Embora nem todas as etapas da modelagem matemática sejam sempre alcançadas em todas as situações de ensino, como foi evidenciado nesse trabalho, é fundamental trabalhar com essas limitações, adaptando a abordagem de acordo com as necessidades e possibilidades de cada realidade. Nessa ideia, Biembengut e Hein (2023, p. 29) “Vale ressaltar que um curso, uma palestra ou um artigo contendo definições e/ou resultados positivos de trabalhos realizados não são o suficiente para se pôr em prática, num primeiro momento, a modelação [...]”, e que “Habilidade e segurança só se ganham com a experiência”.

Nesse sentido, apresentou-se nesse trabalho uma proposta de ensino alternativo à função quadrática que segue as três etapas fundamentais da modelagem matemática: a Interação, Matematização e Modelo matemático. Compete ao professor acrescentar ou excluir as etapas de acordo com os objetivos que se pretende alcançar.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Breno Machado et al**.** Uso de metodologias alternativas para o ensino de ciências da natureza no município de Independência, Ceará. **Revista Brasileira Ensino de Ciência e Matemática**, Passo Fundo, v. 4, n. 1, p. 385-409, jan./jun. 2021.

ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

AZEVEDO, Vera Lucia Antonio; YAMAMOTO, Eriko Matsui. **Reflexões sobre a educação matemática**. Ponta Grossa: Atena, 2002.

BARBOSA, J. C. Modelagem na sala de aula. In: VIII encontro nacional de educação matemática, 2004, Recife. **Anais** do VIII Enem, Recife: Sbem-PE, 2004. 1 CD-ROM.

BASSANEZI, Rodney Carlos**. Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática:** uma nova estratégia. 3.ª ed. São Paulo: Contexto, 2002.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Modelagem matemática:** teoria e prática. 1º ed. São Paulo: Contexto, 2015.

BERTONE, Ana Maria Amarillo; BASSANEZI, Rodney Carlos; JAFELICE, Rosana Sueli da Motta**. Modelagem Matemática**. Uberlândia - MG: Ufu. 2014, p. 09.

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson**. Modelagem matemática no ensino**. 5º ed. São Paulo: Contexto, 2023.

BOLZAN, Tiago Dias; FLORES, Maria Lucia Pozzatti; GOI, Mara Elisângela Jappe. **Ensino da função quadrática através da metodologia de resolução de problemas**. Rio Grande do Sul: Universidade Federal do Pampa,2014.

BRANDT, Celia Finck; BURAK, Dionísio; KLUBER, Tiago Emanuel. **Modelagem Matemática:** perspectivas, experiências, reflexões e teorizações. 2° ed. rev. ampl. Ponta Grossa, ed. UEPG, 2016.

BRASIL. Ministério da Educação**. Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BURAK, D. **Modelagem matemática:** ações e interações no processo de ensino e aprendizagem. 1992. Tese (Doutorado Educacional) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas. Campinas, SP, 1992.

CUNHA, Paulo Robson Pereira. **Modelagem Matemática:** Uma Proposta Pedagógica Para O Ensino Médio Técnico. 2020. 183 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Universidade do Vale de Taquari, Lajeado, RS, 2020.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática:** da teoria à prática. 17ª ed. Campinas - SP: Papirus, 2009.

DELLA NINA, Clarissa Trojack. **Modelagem matemática e novas tecnologias:** uma alternativa para a mudança de concepções em Matemática. 2005. 228f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, 2005.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da indignação:** cartas pedagógicas e outros escritos. São Paulo: ed. Unesp. 2000.

KRUGER, Letícia Meurer; ENSSLIN, Sandra Rolim. Método Tradicional e Método Construtivista de Ensino no Processo de Aprendizagem: uma investigação com os acadêmicos da disciplina Contabilidade III do curso de Ciências Contábeis da Universidade Federal de Santa Catarina. **Revista Organizações em contexto**, São Bernardo do Campo, v.9, n. 18, p. 219-270, dez. 2013.

MARCONI, Marina de A.; LAKATOS, Eva M**. Técnicas de pesquisa:** planejamento, execução de pesquisas, amostragens e técnicas de pesquisas, elaboração, análise e interpretação de dados. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

PARANÁ. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Paraná**. Curitiba: SEED, 2008. Pedagogia do Oprimido. 9 ed., Rio de Janeiro. Ed Paz e Terra. 1981, p.79

RIBEIRO, Flávia Dias. **Jogos e modelagem na educação matemática**. Curitiba: Ibpex, 2008. 124 p.

SANTOS, Josiel Almeida; FRANÇA, Kleber Vieira; SANTOS, Lucia S.B. dos. **Dificuldades na aprendizagem de matemática.** 2007. 41f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Centro Universitário Adventista de São Paulo, São Paulo, SP, 2007.

SILVA, Lorenna Gondim; FELICIO, Cinthia Maria; FERREIRA, Julio Cesar. Modelagem Matemática**:** contributos no ensino de função quadrática na educação básica e profissional. **Revista Ensino da Matemática em Debate**, v.8, n.2, p. 138 -156, out. 2021.

SOUZA, Carine Cabral; FELIPE, Marggie Vanessa Serna. **Importância dos métodos de pesquisa (quantitativos e qualitativos) em geografia**. XIV Encontro Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Geografia, 2021, ed. online.

APÊNDICE A - DIAGNÓSTICO

1 - Qual é a forma geral de uma função quadrática?
Resposta esperada: $f(x) = ax^2 + bx + c$

2 - O que representa o coeficiente a na equação de uma função quadrática?

Resposta esperada:

3 - O que representa o vértice de uma parábola?

Resposta esperada: O vértice de uma parábola é o ponto em que a curva atinge o seu valor máximo ou mínimo.

4 - Como encontrar o vértice de uma parábola?

Resposta esperada: O vértice de uma parábola pode ser encontrado usando a fórmula $x_v = -b/2a$ e substituindo o valor encontrado na equação para obter o valor correspondente de y, ou utilizando a fórmula: $y_v = -\Delta/4a$.

5 - Como determinar se uma parábola possui um máximo ou um mínimo?

Resposta esperada: Se o coeficiente a for positivo, a parábola possui um mínimo, se o coeficiente a for negativo, a parábola possui um máximo.

6 – Em que intervalos a função quadrática é crescente ou decrescente?

Resposta esperada: Se o coeficiente a for positivo, a função é crescente, para valores maiores que o vértice (x_v) e decrescente para valores menores que o vértice (x_v) . Caso o coeficiente a seja negativo, a função é crescente, para valores menores que o vértice (x_v) e decrescente para valores maiores que o vértice (x_v).

7 - O que significa o discriminante de uma função quadrática?

Resposta esperada: É o valor de $\Delta = b^2 - 4ac$ na equação quadrática.

8 - O que podemos dizer sobre os zeros da função quadrática, se:

a) O discriminante de uma função quadrática for igual a zero?

Resposta esperada: A função possui um único zero real.

b) O discriminante de uma função quadrática for maior que zero?

Resposta esperada: A função possui dois zeros reais.

c) O discriminante de uma função quadrática for menor que zero?

Resposta esperada: A função não possui zeros reais.

APÊNDICE B - QUESTIONÁRIO FINAL

1 - Você sentiu que a explicação foi abrangente o suficiente para abordar todos os aspectos importantes do assunto?

a) Sim, todos os aspectos foram abordados de forma satisfatória

b) Em geral, sim, mas faltaram alguns detalhes importantes

c) Não, houve lacunas significativas na explicação

2 - Como você avaliaria o ritmo da explicação?

a) Adequado, nem muito rápido nem muito lento

b) Um pouco rápido, gostaria de mais tempo para absorver as informações

c) Um pouco lento, senti que poderia ter avançado mais rapidamente

3 - Você sente que possui conhecimento suficiente sobre a função quadrática para aplicá-la ou discuti-la de forma significativa?

a) Sim, estou confiante em aplicar e discutir o assunto

b) Sim, mas ainda tenho algumas dúvidas pontuais

c) Não, ainda preciso de mais informações e prática

4 - Qual foi a sua compreensão geral da modelagem matemática após a explicação?

a) Muito clara e completa

b) Razoavelmente clara, mas com algumas dúvidas

c) Ainda um pouco confuso(a), precisando de mais esclarecimentos

d) Não compreendi bem a modelagem matemática

5 - Quais foram os principais aspectos da modelagem matemática que você considerou mais claros e fáceis de entender?

a) O propósito e importância da modelagem matemática

b) O processo básico de construção de modelos matemáticos

c) Os tipos de modelos matemáticos utilizados na modelagem

d) Outros (especifique)

6 - Quais partes da modelagem matemática você achou mais desafiadoras ou difíceis de compreender?

a) Formulação matemática das equações de um modelo

b) Validação e verificação de modelos matemáticos

c) Aplicação da modelagem matemática em áreas específicas

d) Outros (especifique)

7 - Que tipo de recursos adicionais você gostaria de ter para ajudar na compreensão da modelagem matemática? (Marque todas as opções relevantes)

a) Exemplos práticos de aplicação da modelagem matemática

b) Diagramas, gráficos ou ilustrações visuais dos modelos matemáticos

c) Exercícios práticos para aplicar os conceitos aprendidos

d) Referências adicionais (livros, artigos, sites) sobre o tema

e) Outros (especifique)

8 - Como você avaliaria a qualidade geral da explicação da modelagem matemática?

a) Excelente, atendeu totalmente às minhas expectativas

b) Boa, proporcionou uma compreensão satisfatória da modelagem matemática

c) Regular, poderia ter sido mais clara e abrangente

d) Insatisfatória, não consegui entender bem a modelagem matemática

9 - Você já ouviu falar em modelagem matemática (busca de modelos matemáticos que se ajustam a problemas reais)?

( ) Sim ( ) Não

10 - O conteúdo ficou mais ou menos interessante, após a intervenção e aplicação da modelagem matemática? ( ) Mais interessante. ( ) Menos interessante