INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO AMAPÁ
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
CAMPUS MACAPÁ

PEDRO ALVARO LOPES DOS REIS FILHO

GENERALIZANDO O TEOREMA DE PITÁGORAS: uma abordagem com alunos do 2º ano do Ensino Médio do Instituto Federal do Amapá

MACAPÁ
2022

PEDRO ALVARO LOPES DOS REIS FILHO

GENERALIZANDO O TEOREMA DE PITÁGORAS: uma abordagem com alunos do 2º ano do Ensino Médio do Instituto Federal do Amapá

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amapá, em cumprimento às exigências legais como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Helington Franzotti Araujo de Souza.

MACAPÁ

2022

Biblioteca Institucional - IFAP
Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

R375g Reis Filho, Pedro Alvaro Lopes dos
Generalizando o Teorema de Pitágoras: uma abordagem com os alunos do 2º Ano do Ensino Médio do Instituto Federal do Amapá / Pedro Alvaro Lopes dos Reis Filho - Macapá, 2023.
82 f.: il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) -- Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amapá, Campus Macapá, Curso de Licenciatura em Matemática, 2023.

Orientador: Helington Franzotti Araújo de Souza.

1. Pitágoras. 2. demonstrações. 3. generalização. I. Souza, Helington Franzotti Araújo de, orient. II. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica do IFAP com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

PEDRO ALVARO LOPES DOS REIS FILHO

GENERALIZANDO O TEOREMA DE PITÁGORAS: uma abordagem com os alunos do 2º Ano do Ensino Médio do Instituto Federal do Amapá

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amapá, em cumprimento às exigências legais como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Helington Franzotti Araujo de Souza.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
HELINGTON FRANZOTTI ARAUJO DE SOUZ
Data: 18/08/2023 17:01:01-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Me. Helington Franzotti Araujo de Souza (Orientador)

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amapá

André Luiz dos Santos Ferreira.

Prof. Me. André Luiz dos Santos Ferreira (Membro interno)

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amapá

Paulo Robson Pereira da Cunha

Prof. Me. Paulo Robson Pereira da Cunha (Membro externo)

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amapá

Apresentado em: 19/06/2022

Conceito/Nota: 99,67

A Deus, aos meus pais, familiares e amigos.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela minha vida, e por me permitir ultrapassar todos os obstáculos encontrados ao longo da realização deste trabalho.

Aos meus pais, Pedro Alvaro e Maria do Socorro, e irmãos que me incentivaram nos momentos difíceis e compreenderam a minha ausência enquanto eu me dedicava à realização deste trabalho.

Ao professor Helington Franzotti, por ter sido meu orientador e ter desempenhado tal função com dedicação e amizade.

Aos professores do colegiado de Matemática do Instituto Federal do Amapá Campus, por todos os conselhos, pela ajuda e pela paciência com a qual guiaram o meu aprendizado.

À instituição de ensino Instituto Federal do Amapá, essencial no meu processo de formação profissional, pela dedicação, e por tudo o que aprendi ao longo dos anos do curso.

A minha namorada Adriana Santos, que conheci no começo do curso, e que esteve presente durante toda minha trajetória da graduação.

Aos meus amigos e colegas de turma, Cariolando Magalhães, Ismael Otony, Pedro Victor, Alberto Paranhos e Ledegelson Moura por compartilharem comigo tantos momentos de descobertas e aprendizado e por todo o companheirismo ao longo deste percurso.

A todos com quem convivi ao longo desses anos de curso, que me incentivaram e que certamente tiveram impacto na minha formação acadêmica.

"A matemática é o alfabeto no qual Deus escreveu o universo".

(Galileu Galilei).

RESUMO

Este trabalho trata-se de uma pesquisa realizada sobre o Teorema de Pitágoras no qual foram abordados um breve resumo sobre a história de Pitágoras, apresentação do Teorema de Pitágoras, bem como foram mostradas algumas demonstrações deste importante teorema. O teorema foi estendido para outros polígonos que não são quadrados e, principalmente, foi mostrada a sua validade para quaisquer figuras planas semelhantes e proporcionais, ou seja, foi feita a generalização do Teorema de Pitágoras para figuras planas gerais. Além disso, foi realizada uma oficina sobre a temática em questão com o auxílio do *software* de geometria dinâmica *GeoGebra*, com alunos do 2º Ano do Ensino Médio do Instituto Federal do Amapá, *campus* Macapá. Os resultados indicaram que com a aplicação do objeto de estudo deste trabalho houve motivação dos estudantes para com o conteúdo matemático abordado, sobretudo em relação às demonstrações do teorema de Pitágoras e sua generalização. A apresentação de tais conceitos e dessas provas matemáticas a alunos do Ensino Médio, podem potencializar e aprimorar o pensamento geométrico e a maturidade algébrica dos alunos.

Palavras-chave: Pitágoras; generalização; demonstrações; *Geogebra*.

ABSTRACT

This work is a research carried out on the Pythagorean Theorem in which a brief summary of the history of Pythagoras, presentation of the Pythagorean Theorem, as well as some demonstrations of this important theorem were shown. The theorem was extended to other non-square polygons and, mainly, its validity was shown for any similar and proportional plane figures, that is, the Pythagorean Theorem was generalized to general plane figures. In addition, a workshop on the subject in question was carried out with the help of the GeoGebra dynamic geometry software, with students of the 2nd year of high school at the Federal Institute of Amapá, Macapá campus. The results indicated that with the application of the object of study of this work, the students were motivated towards the mathematical content addressed, especially in relation to the demonstrations of the Pythagorean theorem and its generalization. The presentation of such concepts and mathematical proofs to high school students can enhance and improve students' geometric thinking and algebraic maturity.

Keywords: Pythagorean; generalization; demonstrations; *Geogebra*.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
FME. Vol.9	Fundamentos de Matemática Elementar Volume 9
IFAP	Instituto Federal do Amapá
PCN's	Parâmetros Curriculares Nacionais
SEGEM	Seção de Gerenciamento do Ensino Médio
u.a.	unidade de área

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo introdutório, será feita a apresentação do tema deste trabalho, bem como a justificativa e a descrição dos objetivos desta pesquisa. Além disso, serão apresentadas as temáticas de cada capítulo que compõem este Trabalho de Conclusão de Curso.

No Capítulo 2 foi feita uma abordagem histórica da personagem Pitágoras, e a contextualização histórica do teorema que leva o seu nome. Ainda neste capítulo foi apresentada a forma clássica e uma representação geométrica do teorema.

No Capítulo 3 apresentou-se algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras: a primeira envolvendo as relações métricas no triângulo retângulo, a segunda foi feita utilizando-se relações de equivalência e terceira pelo método de comparação de áreas.

No Capítulo 4 segue-se rumo ao objetivo principal deste trabalho, que é a generalização do teorema de Pitágoras. Para isso, foi mostrada a sua validade para triângulos equiláteros, depois para hexágonos regulares, para semicírculos e, finalmente, a sua generalização para figuras gerais.

O Capítulo 5 aborda de forma introdutória o *software GeoGebra*, pois foi a ferramenta computacional utilizada para a aplicação deste trabalho. Vale ressaltar que não é o objetivo deste trabalho aprofundar-se no *GeoGebra* em si, mas apenas mostrá-lo de forma suficiente para que os alunos possam manipular as figuras apresentadas. Outros trabalhos mais aprofundados com o *GeoGebra* como objetivo principal podem ser realizados utilizando-se a mesma temática.

O Capítulo 6 trata da descrição detalhada dos procedimentos metodológicos adotados para a execução desta pesquisa e descreve em detalhes a aplicação das oficinas e atividades desenvolvidas com os alunos pesquisados.

No Capítulo 7 são feitas as análises dos resultados obtidos com base na produção dos alunos e na resposta de um questionário aplicado ao final do último dia de oficina.

No Capítulo 8 tem-se as considerações finais deste trabalho e, finalmente, as referências utilizadas e os apêndices.

1.1 Apresentação do tema

A temática deste trabalho é voltada para um dos teoremas mais famosos e relevantes da Matemática, o "Teorema de Pitágoras”. Este por sua vez possui inúmeras aplicações no ramo da Geometria Plana, Geometria Espacial, Geometria Analítica e entre outras áreas da matemática. O foco dessa pesquisa são as extensões do Teorema de Pitágoras para polígonos convexos que não são quadrados, tais como triângulos equiláteros, hexágonos regulares e semicírculos, junto com a demonstração da generalização do teorema para regiões planas com figuras gerais construídas a partir dos lados de um triângulo retângulo.

1.2 Justificativa

É perceptível que muitos alunos demonstram certo desinteresse em estudar matemática, seja no ensino fundamental, médio ou superior, e isto vem sendo objeto de estudos de pesquisadores, que atribuem estas dificuldades de aprendizagem de matemática a vários fatores. Corroborando com esta ideia, Carneiro (2018) enfatiza que:

> Ao longo da história da educação, convivemos com uma realidade pouco exitosa no que se refere à aprendizagem da Matemática. As escolas de Educação Básica ainda convivem com históricos de altos índices de reprovação na disciplina de Matemática. Essas questões inquietam e provocam estudiosos da área a tentar compreender fatores que interferem e dificultam a aprendizagem. (CARNEIRO, 2018, p. 9).

Um dos motivos observados para tais dificuldades pode ser a falta de compreensão dos conteúdos por serem de natureza abstrata. Para Beltrão et al. (2017), “na maioria das vezes, o ensino desta disciplina ocorre de maneira abstrata e mecânica, através da resolução de um número repetitivo de exercícios, onde os alunos simplesmente decoram regras e conceitos, fato que desmotiva e dificulta a aprendizagem”. Logo, se faz necessário intervenções por parte dos educadores para amenizar esta necessidade.

Outro fator para a escolha deste tema é a escassez de trabalhos acerca da temática. De fato, há muitos trabalhos acadêmicos sobre o Teorema de Pitágoras, porém, poucos trabalhos sobre a sua generalização. Vale ressaltar que até mesmo grande parte dos alunos da graduação de Licenciatura em Matemática, conhecem o Teorema de Pitágoras, entretanto, desconhecem a sua validade para outros tipos de figuras planas, que não sejam apenas quadrados, isto é, sua generalização para quaisquer figuras proporcionais.

Nesse sentido, este trabalho tem a proposta de apresentar algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras passando por diversos tipos de figuras planas até a sua generalização. Além disso, propõe-se uma aplicação didática para alunos do segundo ano do ensino médio, com o auxílio do *software GeoGebra*.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo Geral

- Abordar a generalização do Teorema de Pitágoras com alunos do 2º ano do ensino médio do Instituto Federal do Amapá, *campus* Macapá.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Mostrar algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras para quadrados;
- Demonstrar que o Teorema de Pitágoras se aplica a outros polígonos semelhantes que não são quadrados como triângulos equiláteros, semicírculos e hexágonos regulares;
- Generalizar o Teorema de Pitágoras, demonstrando a sua validez para quaisquer figuras planas proporcionais;
- Utilizar o *software GeoGebra* para aplicar uma atividade didática sobre o tema para alunos do 2º ano do ensino médio.

2 SOBRE A HISTÓRIA DE PITÁGORAS

A seguir será feita uma revisão introdutória sobre a história de Pitágoras de Samos, tendo como base um levantamento bibliográfico sobre a sua vida.

De acordo com Boyer (2012, p. 56) "Pitágoras era um professor e um místico, nascido em Samos, uma das ilhas do Dodecaneso". Ao longo da história Pitágoras conheceu grandes cidades, onde aperfeiçoou seus conhecimentos, consoante a Amaro (2016, p. 15):

> Pitágoras fez várias viagens pelo Egito, Babilônia e possivelmente indo até a Índia, durante suas peregrinações ele evidentemente absorveu não só informação matemática e astronômica como também muitas ideias religiosas, foi praticamente contemporâneo de Buda, Confúncio e Lao-tse, de modo que esse século foi crítico tanto para o desenvolvimento da religião bem como da Matemática.

Quando voltou ao mundo grego, Pitágoras estabeleceu-se em Crotona, na costa Sudeste do que agora é a Itália, mas que era tão chamada Magna Grécia. Lá, ele fundou uma sociedade secreta que se assemelhava um pouco a um culto órfico, exceto por suas bases matemáticas e filosóficas (Boyer 2012, p. 56).

Os pitagóricos foram os primeiros matemáticos a introduzir o rigor em suas demonstrações. Cruz (2015, p. 5) afirma que:

> Os pitagóricos garantiram seu lugar na história da matemática, principalmente por serem os responsáveis de introduzirem rigor nas demonstrações e generalizações dos resultados, daí uma das grandes descobertas de Pitágoras foi organizar argumentos para demonstrar teoremas, consequentemente a mais importante destas foi demonstrar o Teorema que leva seu nome. Admite-se também que foi ele quem deu os primeiros passos no sentido do desenvolvimento da teoria dos números, tentando explicar alguns porquês com uso das primeiras propriedades.

Não se sabe ao certo se o Teorema de Pitágoras foi criado por Pitágoras, pois era comum entre seus discípulos atribuir os créditos de suas descobertas ao seu mestre. Conforme Amaro (2016, p. 15):

> O fato de Pitágoras permanecer uma figura muito obscura se deve em parte a perda de documentos daquela época. Várias biografias de Pitágoras foram escritas na antiguidade, mas se perderam, outra dificuldade que caracteriza a sua figura era da escola pitagórica ser uma sociedade secreta, conhecimento e propriedade eram comuns, por isso a atribuição de descobertas não era feita a um membro específico da escola, dessa forma não se costuma falar da obra de Pitágoras, mas nas contribuições dos pitagóricos apesar de que na antiguidade era dado todo o crédito ao mestre.

2.1 O Teorema de Pitágoras

O teorema de Pitágoras é considerado o teorema mais conhecido da matemática, sendo também um dos mais importantes, pela sua simplicidade e grande utilidade em diversas aplicações. Conforme Machiavelo (2009, p. 18):

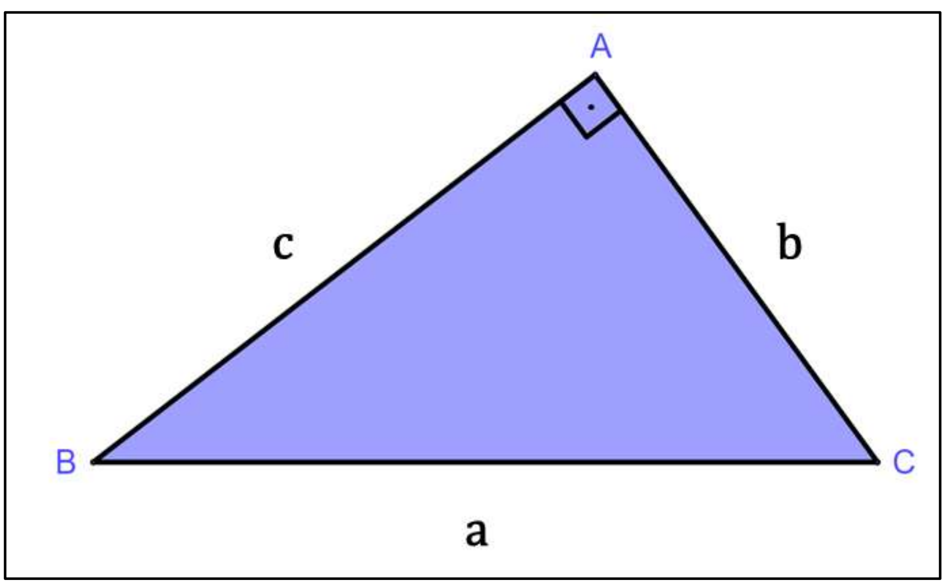
> O «teorema de Pitágoras» é, sem qualquer dúvida, o resultado matemático mais conhecido. A simplicidade do enunciado, conjugada com o facto de ser uma observação bastante subtil sobre uma curiosa relação entre figuras geométricas simples - nomeadamente três quadrados construídos sobre os lados de um triângulo rectângulo -, fazem com que este resultado apele a um certo sentido estético abstracto que os seres humanos possuem, mesmo aqueles que não gostam de o admitir.

Segundo Ribeiro (2012, p. 321) "Esse teorema estabelece uma relação envolvendo as medidas da hipotenusa e dos catetos de um triângulo retângulo". Uma maneira de explicitar tal relação no Teorema de Pitágoras em língua portuguesa, é afirmar que:

"Em todo triângulo retângulo, a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa."

Isto significa que, se um triângulo for retângulo, então a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos, equivale à área do quadrado construído sobre a hipotenusa. Além disso, a recíproca também é verdadeira, isto é, sempre que a equivalência entre a soma das áreas dos quadrados dos catetos e a hipotenusa for verificada, então o triângulo é retângulo.

Figura 1 – Triângulo retângulo.



Fonte: O autor (2022).

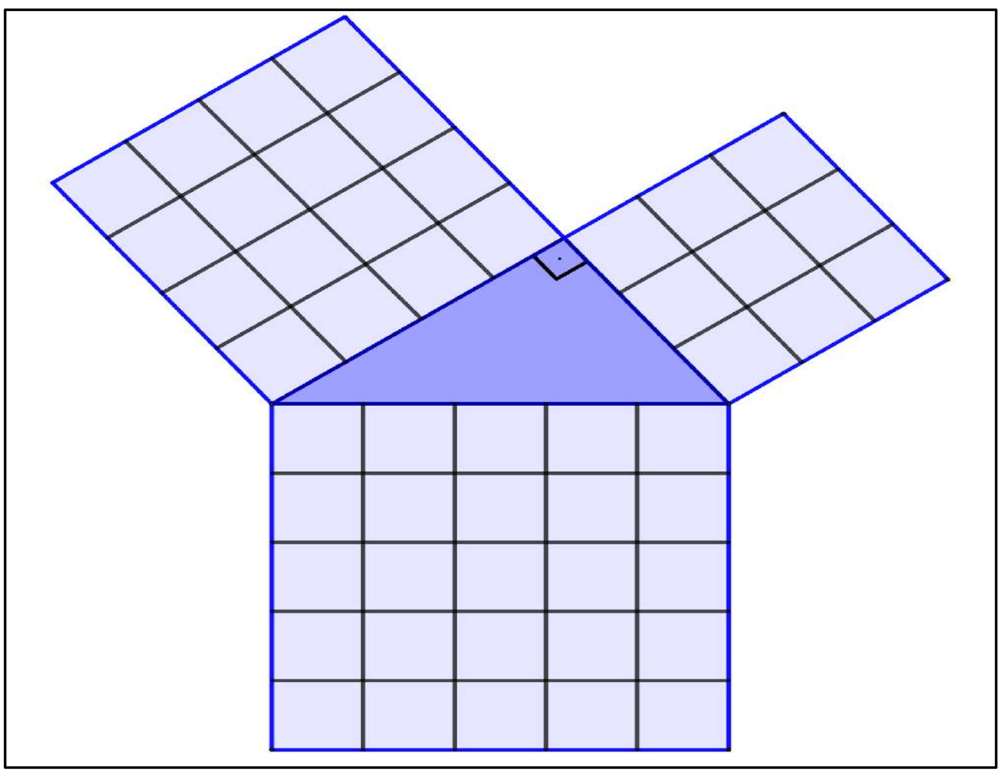
Na Figura 1, tem-se que **a** é a medida da hipotenusa, **b** e **c** são as medidas dos catetos. Pelo Teorema de Pitágoras vale que:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

A relação entre as medidas da hipotenusa e dos catetos de um triângulo retângulo pode ser verificada utilizando-se figuras, obtendo assim uma visualização e interpretação geométrica para o Teorema de Pitágoras.

Note que cada quadrado construído sobre os lados do triângulo retângulo está dividido em quadrados menores que servem como uma unidade de área (u.a.). Assim, considere três quadrados construídos a partir de cada lado do triângulo (Ver a Figura 2). Observando esta imagem pode-se notar que a área do quadrado construído a partir da hipotenusa (25 u.a.) é igual à soma das áreas dos outros dois quadrados, construídos a partir dos catetos $(16 \text{ u.a.} + 9 \text{ u.a.})$.

Figura 2 – Interpretação geométrica do Teorema de Pitágoras.



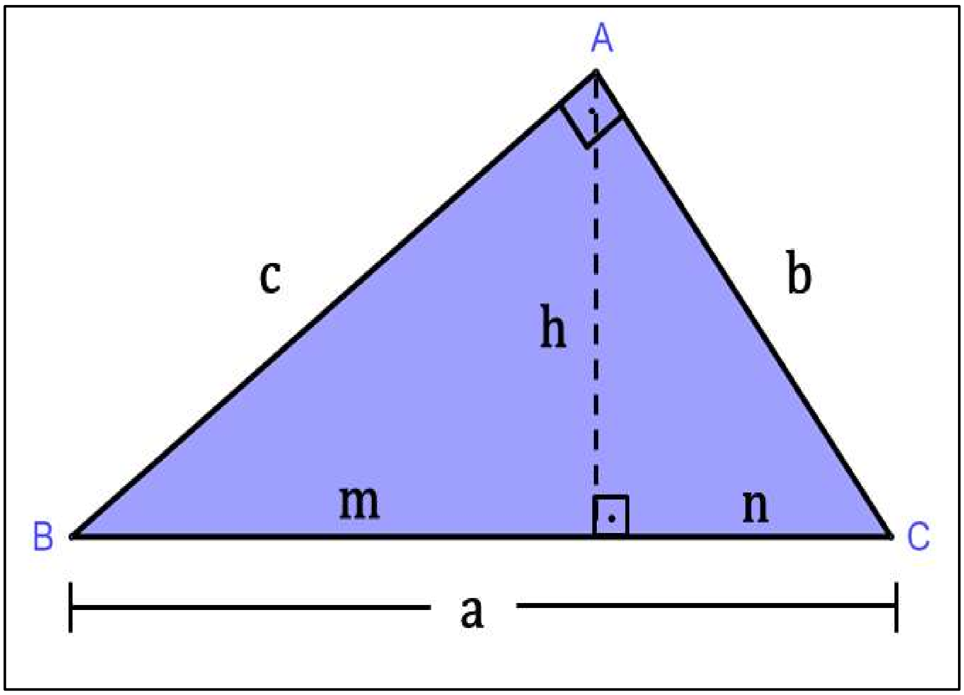
Fonte: O autor (2022).

3 ALGUMAS DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Nesta seção abordaremos algumas demonstrações acerca do Teorema de Pitágoras.

3.1 Demonstração utilizando as relações métricas do triângulo retângulo

Figura 3 - Figura auxiliar da demonstração 1.



Fonte: O autor (2022).

Da figura acima podemos destacar as seguintes relações métricas:

$$c^2 = a \cdot m$$

$$b^2 = a \cdot n$$

Adicionando essas igualdades membro a membro, temos:

$$c^2 + b^2 = a \cdot m + a \cdot n$$

$$c^2 + b^2 = a \cdot (m + n)$$

$$c^2 + b^2 = a \cdot a$$

$$c^2 + b^2 = a^2$$

Portanto, em um triângulo retângulo:

$$c^2 + b^2 = a^2 \qquad \text{ou} \qquad a^2 = c^2 + b^2$$

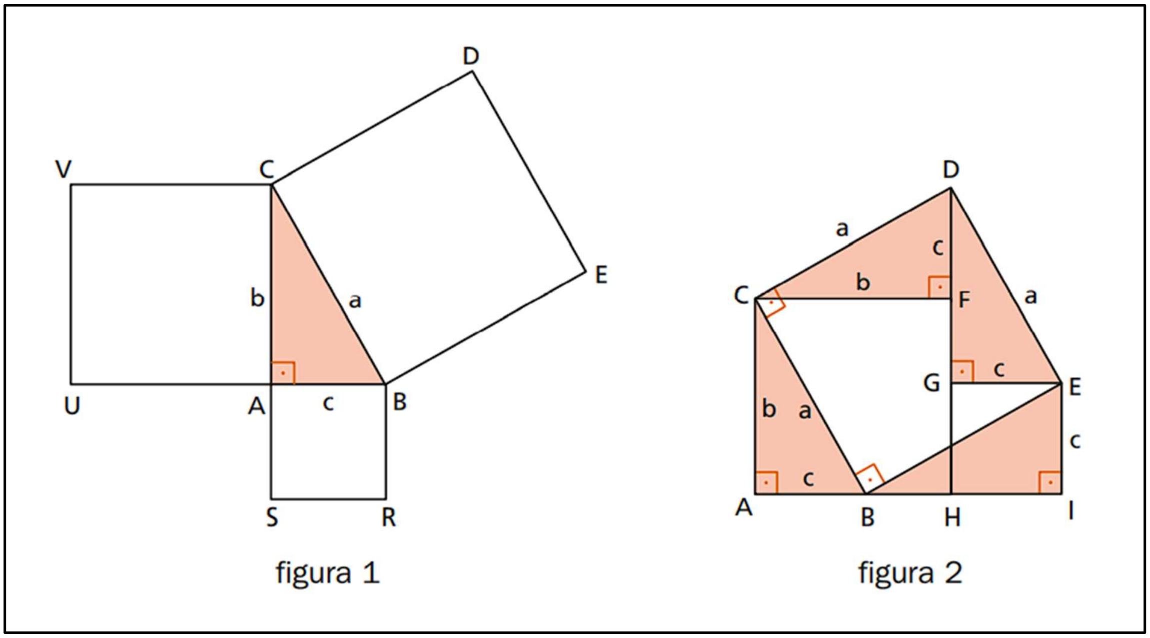
3.2 Relação de Pitágoras por equivalência

A demonstração a seguir foi retirada do livro “Fundamentos da Matemática Elementar 9 (FME. Vol.9)”.

Considere um triângulo retângulo ABC de hipotenusa **a** e catetos **b** e **c.**

O quadrado BCDE de lado **a** é o quadrado construído sobre a hipotenusa (ou o quadrado da hipotenusa) e os quadrados ABRS de lado **c** e ACVU de lado **b** são os quadrados construídos sobre os catetos (ou os quadrados dos catetos) (figura 1).

Figura 4 – Primeira figura auxiliar da demonstração 2.



Fonte: FME. Vol.9.

Agora consideramos as construções auxiliares da figura 2. Devemos notar que:

BCDE é o quadrado de lado **a**.

△ABC, △FCD, △GED e △IBE são triângulos congruentes entre si que vamos chamar de **T**.

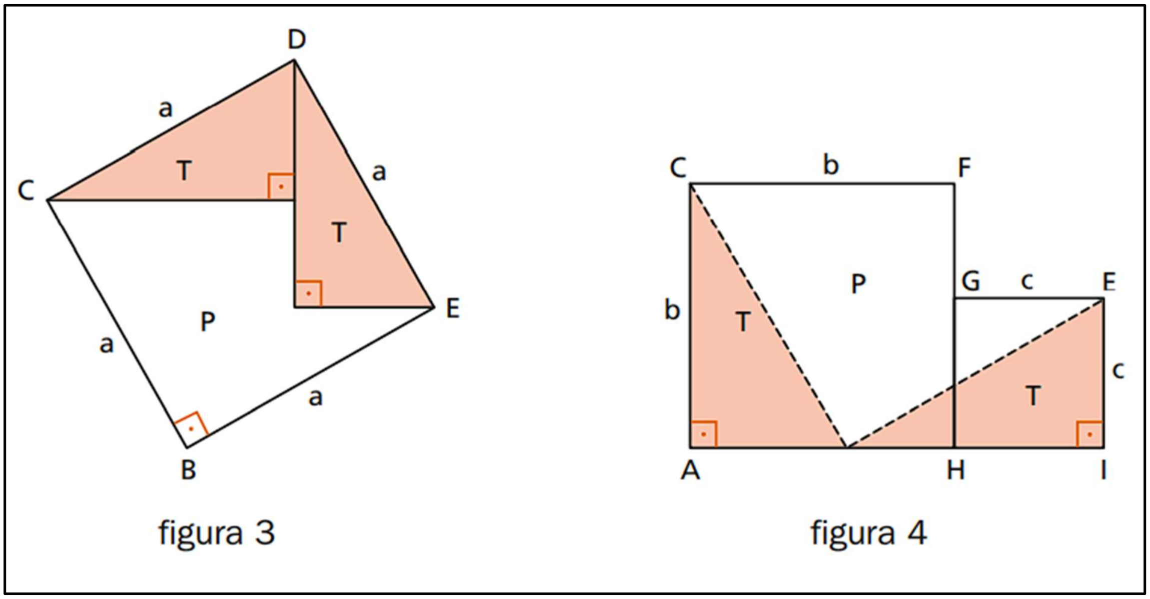
ACFH é um quadrado de lado **b** congruente ao quadrado ACVU.

EIHG é um quadrado de lado **c** congruente ao quadrado ABRS.

BCFGE é um polígono que vamos chamar de **P**.

Analisando o quadrado BCDE (figura 3) e a reunião dos quadrados ACFH e EIHG (figura 4), temos:

Figura 5– Segunda figura auxiliar da demonstração 2.



Fonte: FME. Vol.9

$$BCDE = P + 2T$$

$$ACFH + EIHG = P + 2T$$

Igualando estas duas equações, temos:

$$BCDE \approx ACFH + EIHG$$

Dada a congruência dos quadrados, temos, então:

$$BCDE \approx ACVU + ABRS$$

Ou seja:

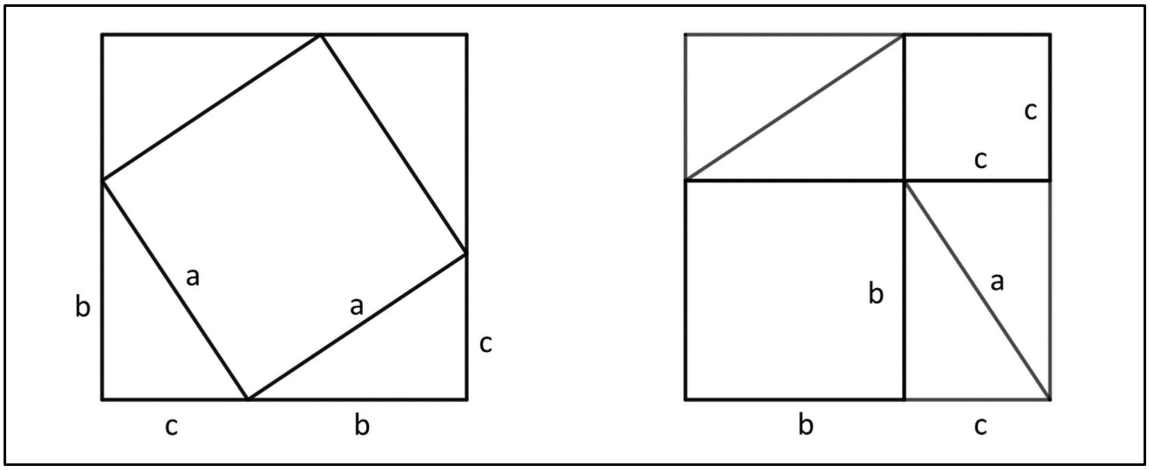
"O quadrado construído sobre a hipotenusa é equivalente à soma dos quadrados construídos sobre os catetos."

Ou ainda:

"O quadrado da hipotenusa é equivalente à soma dos quadrados dos catetos."

3.3 Demonstração pela comparação de áreas

Figura 6 – Figura auxiliar demonstração 3.



Fonte: O autor (2022).

No quadrado à esquerda da figura a seguir que tem $b + c$ como lado, retiremos quatro triângulos retângulos iguais e obtemos um quadrado de lado a. Se fizermos a mesma operação no quadrado à direita (também de lado $b + c$), restarão dois quadrados de lado b e c, isto é $a^2 = b^2 + c^2$.

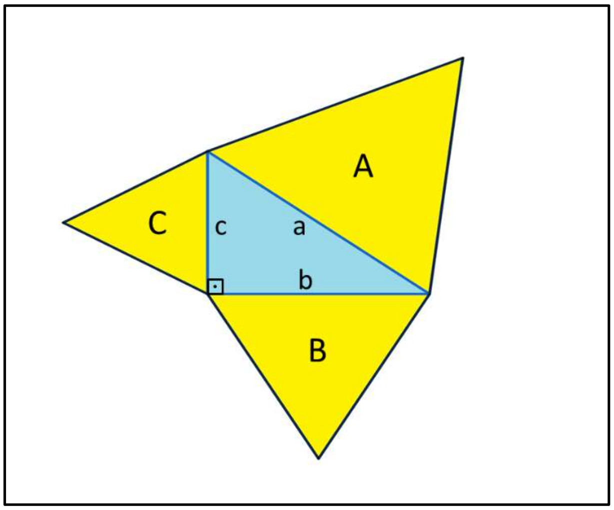
Conforme Oliveira (2016, p. 34) "Esta é considerada a mais bela demonstração do Teorema de Pitágoras".

4 GENERALIZANDO O TEOREMA DE PITÁGORAS

Neste capítulo iremos abordar as extensões do teorema de Pitágoras para outros polígonos que não são quadrados, junto com a sua generalização para figuras gerais.

4.1 Extensão para triângulos equiláteros.

Figura 7 – Triângulos equiláteros construídos sobre os lados do triângulo retângulo.



Fonte: O autor (2022).

Construiremos triângulos equiláteros cujos lados são homólogos com os lados do triângulo retângulo ABC.

Denotaremos por $A, B\ e\ C$ as áreas dos triângulos equiláteros cujos lados são $a, b\ e\ c$, respectivamente. Calculando suas áreas:

$$A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$B = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$$

$$C = \frac{c^2\sqrt{3}}{4}$$

Somando B e C, obtemos:

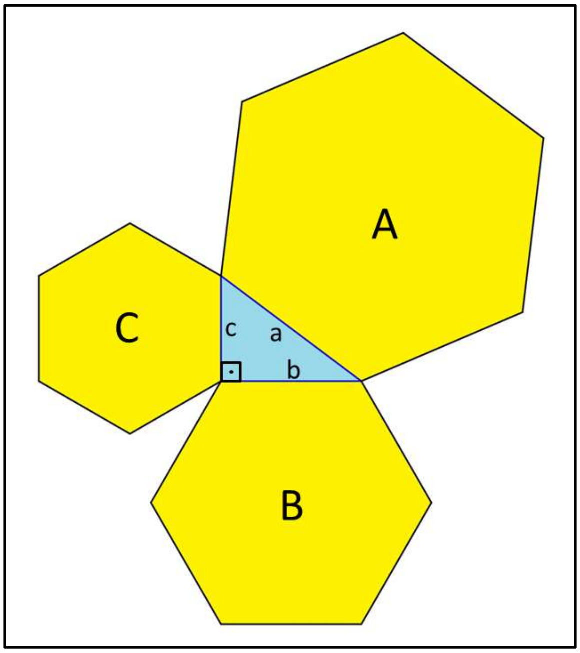
$$B + C = \frac{b^2\sqrt{3}}{4} + \frac{c^2\sqrt{3}}{4} = (b^2 + c^2)\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Pelo teorema de Pitágoras é válido que: $a^2 = b^2 + c^2$

$$B + C = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \therefore B + C = A.$$

4.2 Extensão para hexágonos regulares.

Figura 8 – Hexágonos regulares construídos sobre os lados do triângulo retângulo.



Fonte: O autor (2022).

Construiremos hexágonos regulares cujos lados são homólogos com os lados do triângulo retângulo ABC.

Denotaremos por $A, B\ e\ C$ as áreas dos hexágonos regulares cujos lados são $a, b\ e\ c$, respectivamente. Calculando suas áreas:

$$A = 3a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$B = 3b^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$C = 3c^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Somando B e C, obtemos:

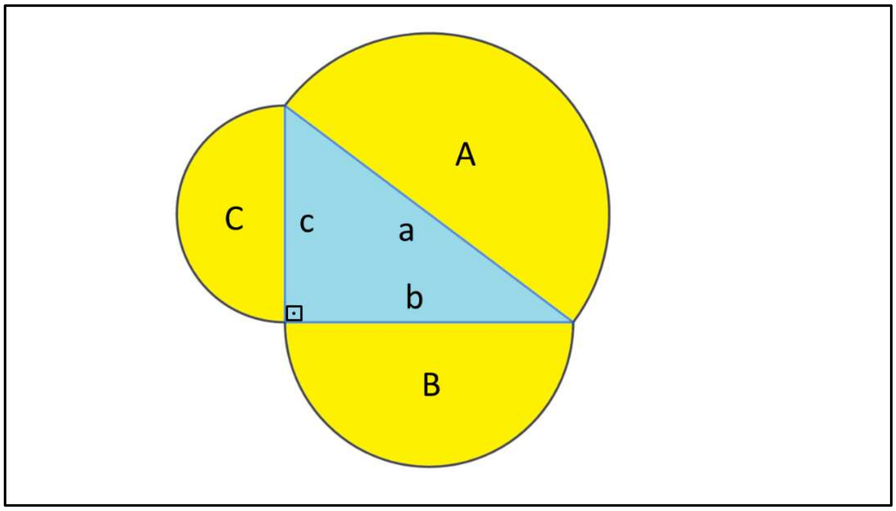
$$B + C = 3b^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 3c^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}(b^2 + c^2)$$

Pelo teorema de Pitágoras é válido que: $a^2 = b^2 + c^2$

$$B + C = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 \therefore B + C = A.$$

4.3 Extensão para semicírculos.

Figura 9 – Semicírculos construídos sobre os lados do triângulo retângulo.



Fonte: O autor (2022).

Construiremos semicírculos cujos diâmetros são homólogos com os lados do triângulo retângulo ABC.

Denotando por A a área do semicírculo cujo diâmetro é a, temos que seu raio é $\frac{a}{2}$. De forma análoga faremos com os outros semicírculos. Para B e C seus raios são $\frac{b}{2}$ e $\frac{c}{2}$, respectivamente. Calculando as áreas de cada um:

$$A = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2\pi}{8}$$

$$B = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2\pi}{8}$$

$$C = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{c^2\pi}{8}$$

Somando B e C, obtemos:

$$B + C = \frac{b^2\pi}{8} + \frac{c^2\pi}{8} = (b^2 + c^2)\frac{\pi}{8}$$

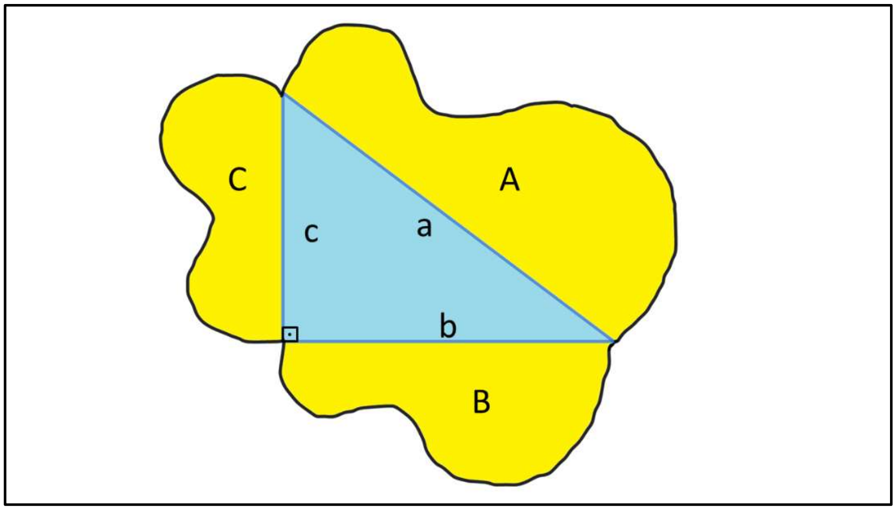
Pela relação de Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2$

$$B + C = \frac{a^2\pi}{8} \therefore B + C = A$$

4.4 Extensão para figuras gerais

Figuras semelhantes são construídas sobre os lados do triângulo retângulo.

Figura 10 - Figura auxiliar para generalização do Teorema de Pitágoras.



Fonte: O autor (2022).

Obs.: A razão entre as áreas de figuras semelhantes é o quadrado da razão de semelhança. Note que:

$$\frac{B}{A} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \Rightarrow \frac{B}{b^2} = \frac{A}{a^2}$$

$$\frac{C}{A} = \left(\frac{c}{a}\right)^2 \Rightarrow \frac{C}{c^2} = \frac{A}{a^2}$$

Das equações acima podemos inferir que:

$$\frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2} = \frac{C}{c^2}$$

Utilizando as propriedades de proporção podemos criar uma nova fração equivalente;

$$\frac{A}{a^2} = \frac{B + C}{b^2 + c^2}$$

Daí:

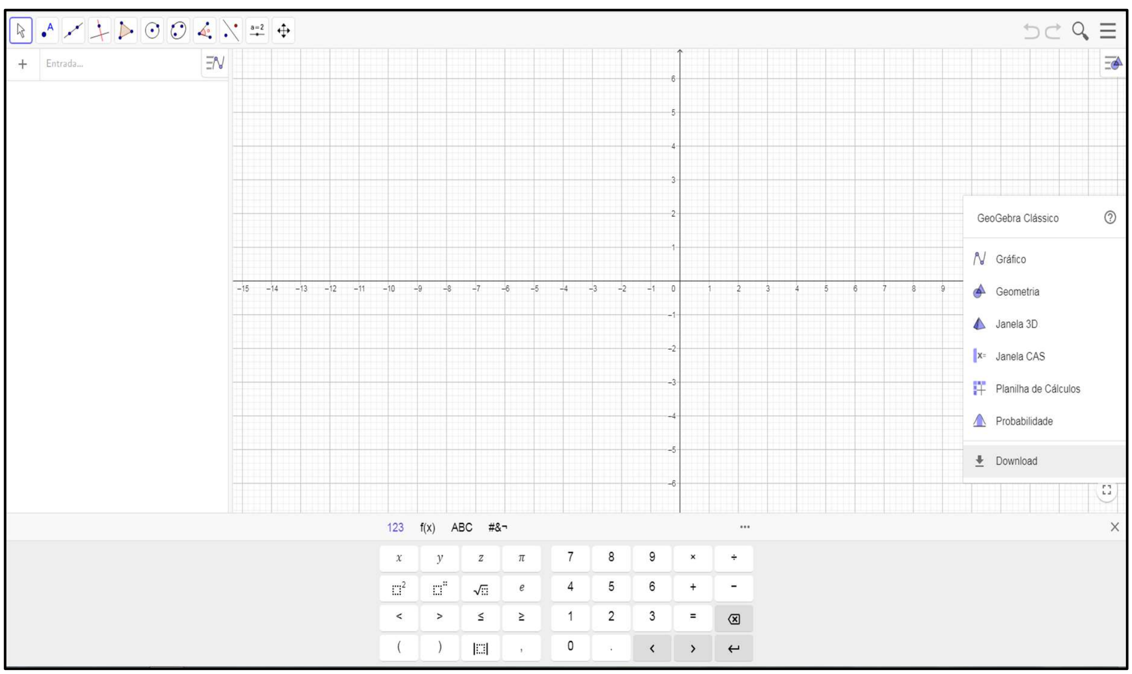
$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow A = B + C$$

5 O QUE É O *GEOGEBRA*?

Criado por Markus Hohen Warter em 2001, o *software Geogebra* apresenta inúmeras potencialidades para as aulas de Matemática, sendo classificado como um *software* de **geometria dinâmica**. O *GeoGebra* possui recursos que possibilitam que seja utilizado em todos os níveis escolares, desde a educação básica, à superior. É um *software* gratuito, sendo este dividido em dimensões que se relacionam por meio de representação geométrica e elementos de álgebra, contendo várias ferramentas que permitem o auxílio nas construções de gráficos, equações e coordenadas (GOMES; OLIVEIRA; DOMINGOS, 2013 *apud.* DIAS, 2022, p.72).

O termo "Geometria Dinâmica", de acordo com Menegotto (2010 apud COSTA, BONETE, 2019, p. 4), "é utilizado para indicar softwares interativos que possibilitam ao usuário a criação e a modificação de figuras geométricas construídas a partir de suas propriedades, porém esse termo não deve ser visto como uma nova geometria."

Figura 11 - Janela do *GeoGebra*.



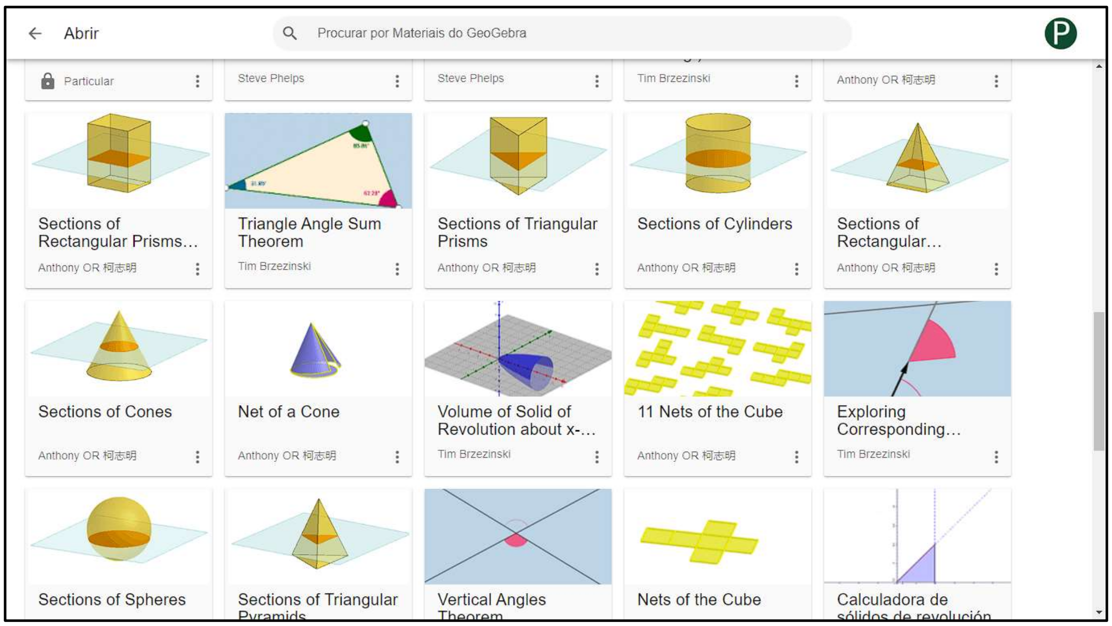
Fonte: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt.

De acordo com Souza (2015, p. 46):

> O programa permite realizar construções geométricas como pontos, retas, segmentos de reta, polígonos, secções cônicas, além do trabalho com funções, vetores, matrizes, e muitas outras funcionalidades que vão desde a matemática elementar até conceitos avançados de geometria analítica, cálculo diferencial e integral e álgebra linear.

O *GeoGebra* também possui um ambiente online onde qualquer usuário pode criar materiais e compartilhar para que outros usuários possam manusear. Esta seção está cheia de materiais online produzidos por vários autores, com conteúdos desde matemática básica como frações, porcentagem, raiz quadrada até tópicos de matemática universitária como curvas de nível, integrais duplas, equações diferenciais entre outros.

Figura 12 – Ambiente online do *GeoGebra*.



Fonte: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt.

Este ambiente é de grande utilidade para alunos que desejam aprender conteúdos que exigem muito do aspecto visual. Por exemplo, o que acontece com o gráfico de uma função do 1º grau quando variamos o coeficiente angular, ou então esboço de um círculo inscrito em um triângulo equilátero, as possibilidades são infinitas. Neste trabalho estão presentes diversas animações retiradas deste ambiente online.

Apesar do *Geogebra* ser online, para ambientes que não tenham acesso à internet também existe a versão offline. Corroborando com Souza (2015, p. 48) “Por ser um programa livre, pode ser baixado e instalado sem restrições a partir do site oficial do desenvolvedor”.

6 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Nesta seção serão descritos os aspectos metodológicos deste trabalho: a construção do objeto de estudo, lócus da pesquisa, público alvo e os detalhes das etapas de aplicação das oficinas.

6.1 A construção do objeto de estudo

O interesse e a escolha por este tema surgiram mediante conversas sobre tópicos pouco explorados da matemática nas aulas do curso de Licenciatura em Matemática no Instituto Federal do Amapá. Dentre tais temas, como sugestão do professor orientador deste trabalho, houve um diálogo sobre o fato de que as extensões do teorema de Pitágoras para figuras semelhantes diferentes de quadrados são pouco conhecidas, até mesmo por alunos da graduação. Diante disso, nasceu a vontade de tornar este tema o objeto de pesquisa para este trabalho de conclusão de curso.

Em um primeiro momento foi feita uma pesquisa bibliográfica buscando-se o referencial teórico em monografias, dissertações e artigos para se apropriar das extensões e da generalização do teorema de Pitágoras. Juntamente com este levantamento bibliográfico, a pesquisa foi feita pensando em como apresentar esta temática de maneira simples e dinâmica para os alunos do 2º ano do Ensino Médio. A partir daí, nasceu a ideia de aplicá-la em formato de oficinas, que ocorreram no laboratório de Matemática do IFAP, *campus* Macapá.

Como uma forma alternativa ao ensino tradicional, estas atividades das oficinas foram pensadas para serem aplicadas no laboratório de matemática utilizando computadores juntamente com o auxílio do *software* de geometria dinâmica *GeoGebra* em alguns momentos cruciais para o melhor entendimento por parte dos alunos.

Quanto à sua metodologia, este trabalho foi feito mediante a abordagem qualitativa. Segundo Denzin e Lincoln (2006, apud AUGUSTO *et. al*, 2013 p.747), a "pesquisa qualitativa envolve uma abordagem interpretativa do mundo, o que significa que seus pesquisadores estudam as coisas em seus cenários naturais, tentando entender os fenômenos em termos dos significados que as pessoas a eles conferem".

Seguindo essa linha de raciocínio, Vieira e Zouain (2005, apud AUGUSTO *et. al*, 2013 p.748) afirmam que a pesquisa qualitativa atribui importância crucial aos depoimentos dos sujeitos sociais envolvidos, aos discursos e aos significados. Assim, esse tipo de pesquisa é regido pela descrição detalhada dos fenômenos e dos elementos envolvidos.

6.2 Lócus da Pesquisa

O local escolhido para aplicação desta pesquisa foi o Instituto Federal do Amapá (IFAP), *campus* Macapá, sediado no município de Macapá, estado do Amapá, localizado na Rodovia BR-210, Km 03, S/n - Brasil Novo, AP, CEP 68909-398. O IFAP oferece cursos técnicos na forma integrada ao ensino médio e subsequente, cursos superiores de licenciatura e bacharelado e uma pós-graduação *latu sensu.* A instituição conta com salas de aula bem equipadas e confortáveis, laboratórios de informática, física, biologia, química, um laboratório IF Maker e, o laboratório de matemática, que foi o local de aplicação desta pesquisa. A escolha deste local se deu pela sua infraestrutura adequada e pela disponibilidade do espaço físico com computadores conectados à internet, quadro branco, e projetor multimídia. De acordo com a RESOLUÇÃO N° 049/2016/CONSUP/IFAP, DE 18 DE OUTUBRO DE 2016 consta que o Laboratório de Matemática do IFAP possui os materiais listados na Tabela 1. Entretanto, observou-se *in loco* que há divergência de alguns dos materiais listados; por exemplo, não há uma lousa interativa e há três quadros magnéticos brancos. A quantidade de computadores instalada no laboratório também é maior do que o número descrito na resolução.

Tabela 1 - Descrição do Laboratório de Matemática do IFAP Campus Macapá.

Laboratório de Matemática.	
Descrição	Unidades
Computador com sistema operacional *windows*	1
Conjunto experimental para estudo de Sólidos.	2
Conjunto experimental para estudo de Volumes.	2
Conjunto experimental para estudo dos ângulos	2
Conjunto experimental para estudo combinatórias	2
Lousa Interativa	1
Quadro magnético branco	1

Fonte: Resolução N° 049/2016/CONSUP/IFAP. DE 18 DE OUTUBRO DE 2016.

Esta observação é relevante, pois aponta a necessidade de atualização deste documento relativo ao laboratório de Matemática do IFAP, *campus* Macapá.

6.3 Público-Alvo

O público participante desta pesquisa foram 10 alunos do 2º ano do ensino médio do IFAP Campus Macapá, sendo 05 alunos do Curso Técnico na Forma Integrada em Redes de Computadores e 05 do Curso Técnico na Forma Integrada em Estradas. A escolha desse público e respectiva série do Ensino Médio se deu a partir da análise da matriz curricular de cada curso, que possui a unidade Geometria Plana no segundo ano do ensino médio, conforme recorte apresentado nas Figuras 13 e 14.

Figura 13 - Parte da ementa de Matemática do 2º ano do Curso Técnico em Redes de Computadores do IFAP.

Curso:	Técnico em Redes de Computadores	**Forma:**	Integrada, regime integral
Eixo Tecnológico:	Informação e Comunicação	**Período Letivo:**	2º ano
Componente Curricular:	Matemática	**Carga Horária:**	120 h

Ementa
Trigonometria no ciclo. Geometria Plana. Geometria Espacial: De Posição e Métrica. Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares. Análise Combinatória e Probabilidade.

UNIDADE II	**GEOMETRIA PLANA** Área das principais figuras planas; Polígonos regulares; Elementos de um polígono regular inscrito; Relações métricas nos polígonos regulares.

Fonte: Resolução N°001/2020 CONSUP/IFAP. DE 17 DE FEVEREIRO DE 2020.

Figura 14 - Parte da ementa de Matemática do 2º ano do Curso Técnico em Estradas do IFAP.

Curso:	Técnico de Nível Médio em Estradas	**Forma:**	Integrada
Eixo Tecnológico:	Estradas	**Período Letivo:**	2º ano
Componente Curricular:	Matemática	**Carga Horária:**	120 h/a

UNIDADE II GEOMETRIA PLANA • Área das principais figuras planas; • Polígonos regulares; • Elementos de um polígono regular inscrito; • Relações métricas nos polígonos regulares.	

Fonte: Resolução N° 15/2018 CONSUP/IFAP. DE 05 DE MARÇO DE 2018.

6.4 Etapas de aplicação

Previamente foi verificada a disponibilidade dos horários das turmas com a SEGEM (Seção de Gerenciamento do Ensino Médio) do IFAP. Uma vez que a coordenação pedagógica disponibilizou os horários e as turmas disponíveis, foi feito um convite presencial aos alunos das turmas do 2º ano do curso técnico em Redes de Computadores e de Estradas. Pedimos licença para o professor presente e explicamos que precisaríamos de 05 voluntários que desejassem participar dessa oficina que seria a base de pesquisa deste trabalho de conclusão de curso, totalizando 10 alunos. Para melhor comunicação com os alunos voluntários foi criado um grupo no WhatsApp (Ver Figura 15). Também foi entregue um termo de aceite e consentimento para os voluntários informando o teor da pesquisa, estando todos de acordo em participar. O referido termo de consentimento consta no Apêndice C deste trabalho.

Figura 15 - Grupo do Whatsapp sobre a Oficina.

Fonte: O autor (2023).

A oficina teve como título: **Explorando o Teorema de Pitágoras e suas Extensões**. Esta foi dividida em 3 dias de atividades, com cada dia tendo a duração de 2 horas/aula de aplicação. As datas escolhidas foram 26 (quarta-feira), 28 (sexta-feira) de abril e 04 de maio (sexta-feira) no horário das 15h às 17h.

Os conteúdos trabalhados durante as oficinas foram apresentados com o auxílio do quadro branco e pincel, bem como slides utilizando o computador e projetor como recursos metodológicos (As apresentações em slides encontram-se no apêndice B). A seguir apresenta-se em detalhes o que ocorreu em cada dia de aplicação.

6.4.1 1º dia de aplicação

Neste primeiro dia alguns tópicos introdutórios sobre o teorema de Pitágoras foram abordados, tais como: Um breve contexto histórico sobre Pitágoras; o que é o Teorema de Pitágoras; alguns exercícios sobre suas aplicações. Todos estes tópicos foram trabalhados com base nos referenciais teóricos constantes dos capítulos 2 e 3 deste trabalho. O objetivo deste encontro foi familiarizar os alunos com o Teorema de Pitágoras. Na Figura 16, tem-se o registro fotográfico deste momento.

Figura 16 - 1º dia de aplicação da oficina.

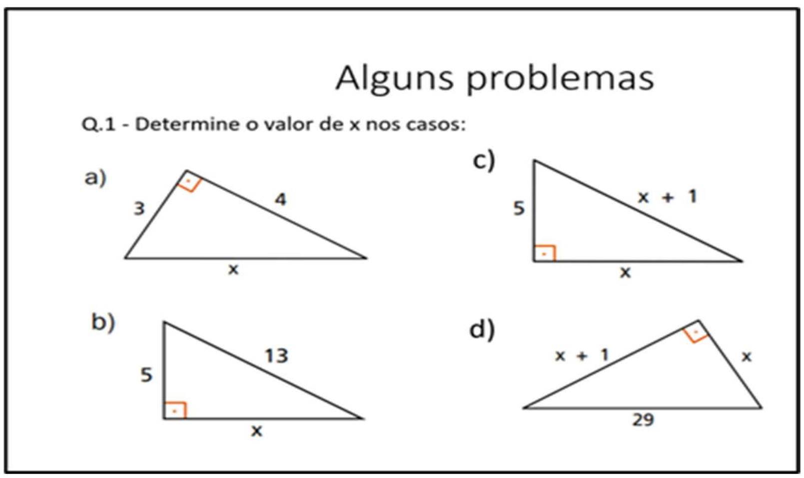
Fonte: O autor (2023).

Para explicar o Teorema de Pitágoras, inicialmente foi apresentado aos alunos o conceito matemático de triângulo retângulo, os seus elementos constituintes, ou seja, hipotenusa e catetos, e também foi explicado que a hipotenusa no triângulo retângulo sempre é o lado que está oposto ao ângulo reto para enfim chegar na relação pitagórica $a^2 = b^2 + c^2$ em que a é a hipotenusa e b, c são os catetos de um triângulo retângulo.

Em seguida foi apresentada aos alunos uma interpretação geométrica do teorema, que pode ser vista na Figura 2. Neste primeiro momento, a participação dos alunos foi bem positiva, pois pode-se notar o interesse deles em aprender os conteúdos apresentados, o que foi concluído pela participação dos alunos por meio de verbalizações, perguntas e comentários, o que mostra que houve engajamento na atividade. No momento posterior, foram propostos alguns exercícios de assimilação e fixação, em que houve a participação efetiva de todos os participantes. Como já era esperado, alguns alunos tiveram mais facilidade do que outros na resolução dos exercícios.

Na Figura 17 vê-se os exercícios propostos, que tiveram como único objetivo fornecer uma revisão básica das relações entre catetos e hipotenusa no triângulo retângulo. Os exercícios são bem simples, do tipo "Encontre o valor de x". Esta abordagem foi necessária para uma sondagem dos conhecimentos prévios dos alunos nas operações básicas e problemas introdutórios no triângulo retângulo. Em relação às dificuldades observadas, em sua maioria tinham relação com a matemática básica, como por exemplo, regra do cancelamento, raiz quadrada, e resolução de equações simples do primeiro grau. A dificuldade em tais conteúdos, compromete o aprofundamento e avanço do conhecimento matemático dos alunos, que em determinada etapa da resolução ficam sem saber como proceder para avançar e chegar à resposta de um exercício ou problema.

Figura 17 - Exercício 1 sobre Teorema de Pitágoras.



Fonte: O autor (2023).

A Figura 17 mostra alguns dos problemas propostos: na "letra a)" a resposta saiu de imediato mentalmente para alguns alunos por ser a famosa terna pitagórica $(3,4,5)$; entretanto, outros tiveram a necessidade de resolver a expressão matemática $3^2 + 4^2 = x^2$ que se obtém aplicando o Teorema de Pitágoras para encontrar a resposta $x = 5$. Da letra "b)" em diante alguns alunos confundiam qual lado era hipotenusa e qual era cateto do triângulo retângulo na hora de aplicar o teorema de Pitágoras. Em vez de fazer $5^2 + x^2 = 13^2$, tentavam resolver a expressão $x^2 = 5^2 + 13^2$.

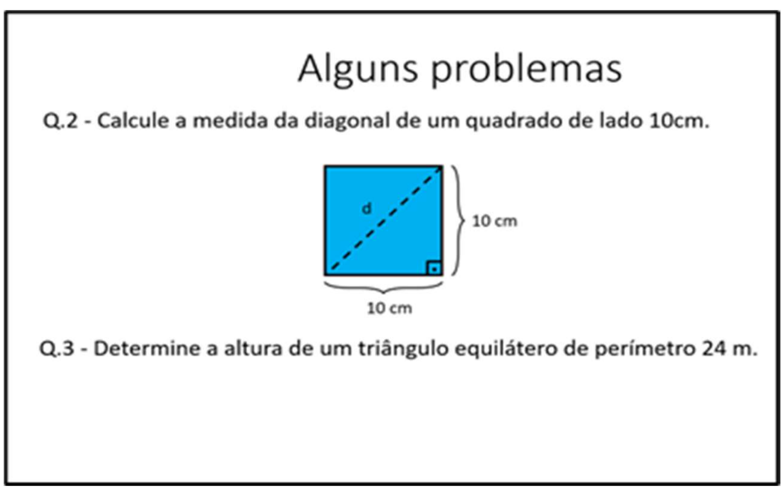
Isto mostra que há uma baixa compreensão prévia da relação entre o significado da expressão matemática e os elementos do triângulo. É comum observar-se este tipo de dificuldade sempre que há a necessidade de representar uma variável ou grandeza simbolicamente utilizando-se letras ou outros símbolos mais abstratos. Neste caso, não há inconsistência na operação do algoritmo nem da expressão matemática em si, mas unicamente da organização da representação algébrica das partes do triângulo corretamente na fórmula. Sobre este aspecto do processo de ensino e aprendizagem, Ujiie *et. al.* (2017, p. 60) citando a visão Ausubel de sobre a aprendizagem significativa, ressalta que:

> Na visão de Ausubel (2003), os conhecimentos prévios podem ser conceitos, ideias, proposições já existentes na estrutura cognitiva, capazes de servir de "ancoradouro" a um novo conhecimento de modo que este adquira, assim, significado para o aprendiz.

Assim, a falta ou insuficiência de conhecimentos prévios como base, na visão destes autores, corrobora com a hipótese de que o aprofundamento dos conteúdos de matemática fica prejudicado, ou sem significado efetivo do ponto de vista do aluno.

Outra situação observada em dificuldades persistentes era no momento da necessidade de expandir o produto notável $(x+1),^2$ que era um termo necessário para solucionar o exercício dos itens "c)" e "d)" e, por fim, resolver a seguinte equação do segundo grau, $2x^2 + 2x - 840 = 0$, cujas raízes são -21 e 20.

Figura 18 - Exercícios 2 e 3 sobre o Teorema de Pitágoras.



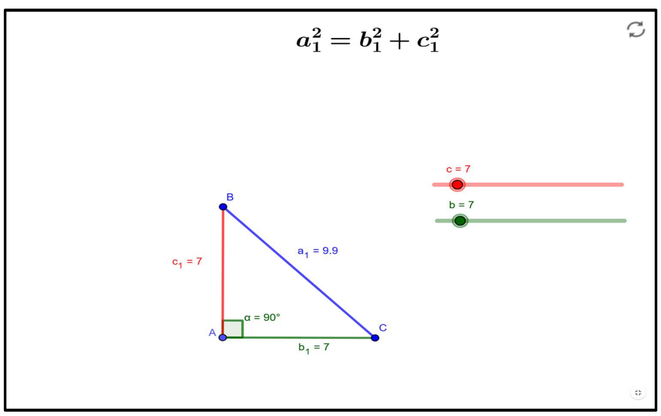
Fonte: O autor (2023).

A Figura 18 mostra os exercícios 2 e 3. No exercício 2, a maioria dos alunos conseguiu associar a aplicação do teorema de Pitágoras como uma ferramenta para o cálculo da diagonal de um quadrado, em que as respostas obtidas foram $d = \sqrt{200}$ ou $d = 10\sqrt{2}$ que são equivalentes, necessitando-se aplicar o conceito de fatoração canônica, que alguns alunos conheciam a sabiam trabalhar com certa habilidade, enquanto outros não.

Já para o problema 3 foi necessário fazer o desenho da figura no quadro para auxiliar na compreensão, pois sem ela os alunos não foram capazes de associar o enunciado com o teorema de Pitágoras, que poderia ser utilizado para o cálculo da altura do triângulo equilátero. Muitas vezes a necessidade de representar uma situação por meio de um desenho ou um gráfico, pode auxiliar na correlação que o aluno faz entre um problema e a ferramenta matemática necessária para solucioná-lo. Associar o enunciado em língua materna com a linguagem matemática não é uma tarefa óbvia para o aluno, que necessita compreender os significados e contextos em que a matemática pode ser aplicada.

Para melhor visualização dos resultados dos cálculos feitos nos exercícios anteriores, foi mostrada uma figura interativa no *GeoGebra* com o objetivo de verificar o que acontece com a hipotenusa de um triângulo retângulo ao passo em que as medidas dos catetos são alteradas (Ver a Figura 19).

Figura 19 - Teorema de Pitágoras visto no GeoGebra de maneira interativa.



Fonte: https://www.geogebra.org/m/vhq9f6xq.

Estas observações reforçam o quanto o domínio de álgebra e aritmética básicas são fundamentais para o aprendizado de Geometria Plana. Pois, apesar dos alunos compreenderem o Teorema de Pitágoras, sem o domínio das outras áreas da matemática fica inviável resolver problemas que exijam um certo grau de maturidade algébrica, conforme já mencionado previamente. Devido a estas dificuldades, foi feita uma revisão destes conceitos básicos para então avançar rumo ao aprofundamento do trabalho.

6.4.2 2º dia de aplicação

Na Figura 20, há o registro do segundo encontro de aplicação, em que foi dado continuidade às atividades planejadas.

Figura 20 - 2º dia de aplicação da oficina.

Fonte: O autor (2023).

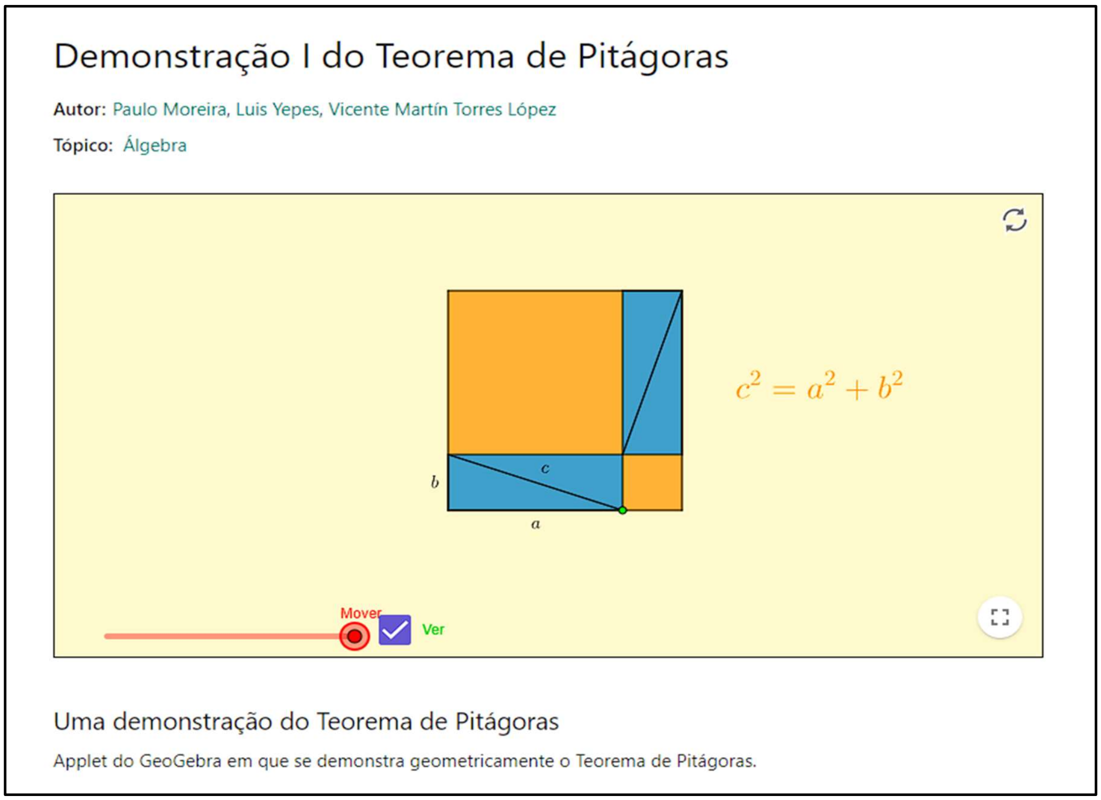
Para este segundo dia de oficina foi apresentado aos alunos o que é uma demonstração matemática, tendo sido trabalhadas duas demonstrações do teorema de Pitágoras e três de suas extensões. O objetivo do segundo encontro foi aprofundar mais a temática com os alunos. O conceito de demonstração matemática apresentado foi o de Singh (2004, p. 41 apud SILVA, 2020, p. 2) que diz que:

> A ideia da demonstração matemática clássica começa com uma série de axiomas, declarações que julgamos serem verdadeiras ou que são verdades evidentes. Então, através da argumentação lógica, passo a passo, é possível chegar a uma conclusão. Se os axiomas estiverem corretos e a lógica for impecável, então a conclusão será inegável. Esta conclusão é o teorema.

A primeira demonstração do teorema foi feita utilizando-se as relações métricas no triângulo retângulo. Esta demonstração é a mais comum de encontrar-se nos livros didáticos de matemática do ensino médio, que geralmente a apresentam de forma rápida, como uma justificativa para a validade do teorema.

A segunda demonstração feita foi a partir da comparação de áreas. As duas demonstrações estão descritas em detalhes no Capítulo 3, Seções 3.1 e 3.3 deste trabalho. Para complementar o entendimento da segunda demonstração foi exibido uma animação no *Geogebra* feita pelos autores Paulo Moreira, Luis Yepes Vincente Martín Torres Lopes chamada “Demonstração I do Teorema de Pitágoras”.

Figura 21 - Demonstração do Teorema de Pitágoras no *Geogebra*.

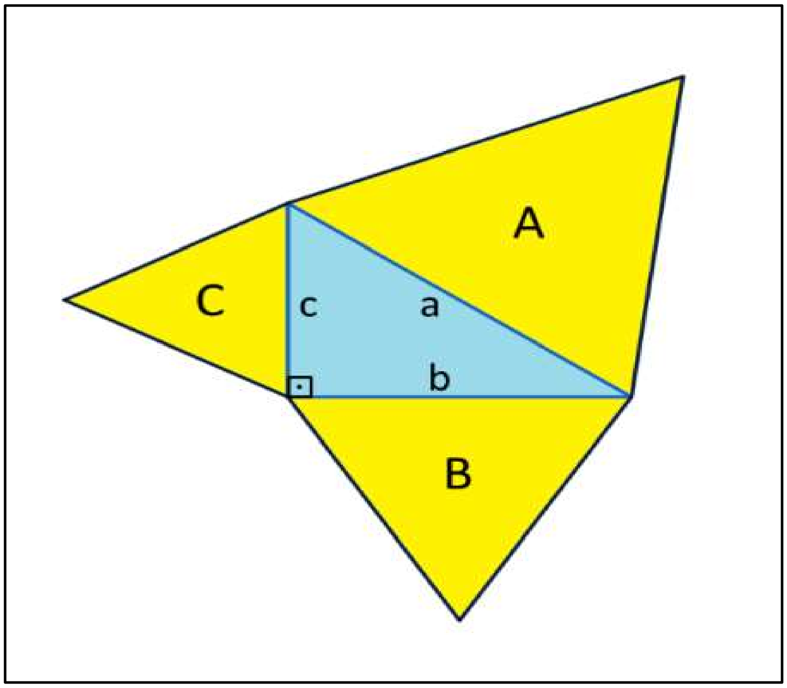


Fonte: https://www.geogebra.org/m/utmyfryp.

Após esta revisão e abordagem do teorema de maneira usual, isto é, para quadrados, iniciou-se uma revisão do cálculo das áreas de algumas outras figuras planas: triângulo equilátero, hexágono regular e semicírculo, para então começar as demonstrações das extensões do teorema de Pitágoras.

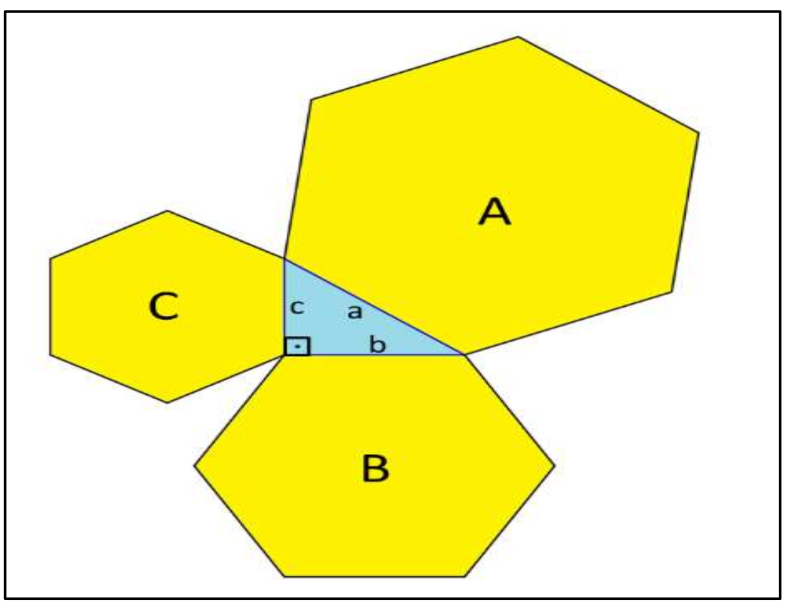
A primeira extensão apresentada foi para triângulos equiláteros, construídos sobre os lados de um triângulo retângulo; em sequência com hexágonos regulares e por fim, com semicírculos. Veja as Figuras 22, 23 e 24 abaixo.

Figura 22 - Teorema de Pitágoras estendido para triângulos equiláteros.



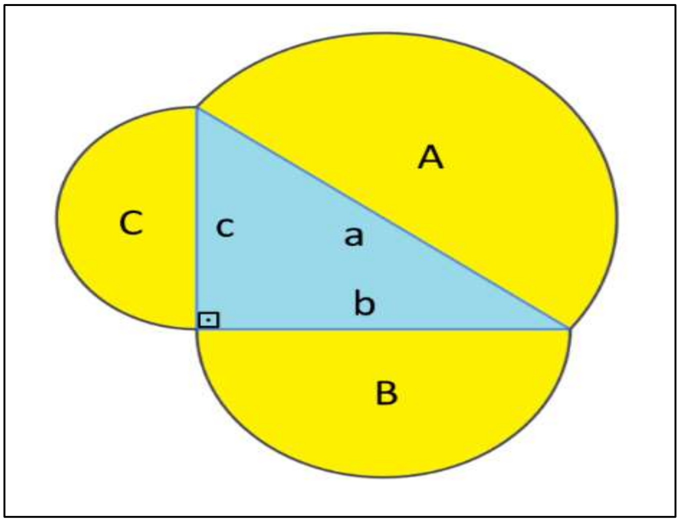
Fonte: O autor (2023).

Figura 23 - Teorema de Pitágoras estendido para hexágonos regulares.



Fonte: O autor (2023).

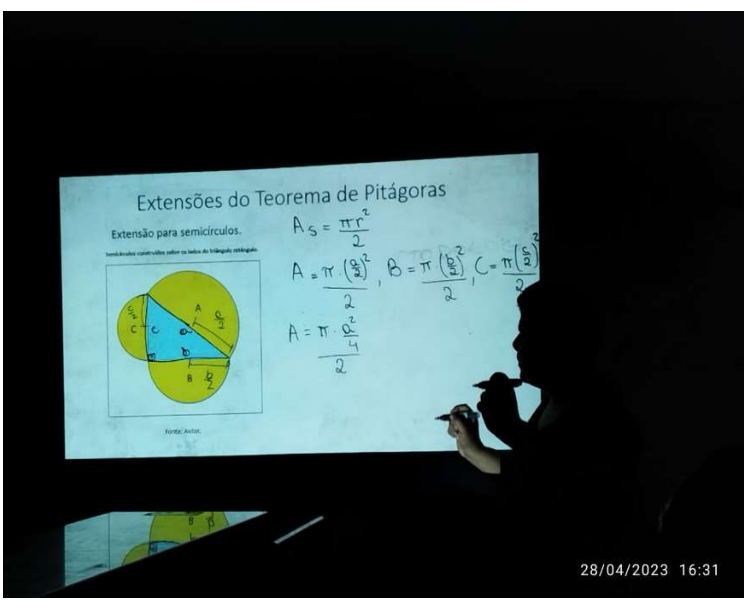
Figura 24 - Teorema de Pitágoras estendido para semicírculos.



Fonte: O autor (2023).

As demonstrações das três extensões acima consistem em provar que a área da figura A é igual à soma das áreas das figuras B e C. A explicação delas ocorreu da seguinte maneira: enquanto as figuras eram projetadas com o auxílio de um projetor, a demonstração matemática foi escrita no quadro branco. O roteiro utilizado foi o do Capítulo 4, das Seções 4.1, 4.2 e 4.3 e a ideia era repassar da maneira mais intuitiva e simples o passo a passo lógico matemático, porém mantendo um certo rigor com a notação e conceitos matemáticos.

Figura 25 - Apresentação da demonstração do Teorema de Pitágoras estendido para semicírculos.



Fonte: O autor (2023).

Algumas observações foram feitas neste segundo dia. Quando foram apresentadas as áreas de algumas figuras planas, entre elas o triângulo equilátero, ao se perguntar para os alunos se algum deles conhecia uma fórmula direta para calcular a área de um hexágono regular, um dos alunos percebeu que para calcular a área de algumas figuras mais complexas pode-se usar a área de outras figuras mais simples que é o caso de utilizar o triângulo equilátero para calcular a área do hexágono regular.

- *Aluno A: Não é só multiplicar por 6 a área de um triângulo equilátero?*

Outra dúvida do Aluno A foi na terceira demonstração das extensões do teorema de Pitágoras que era referente aos semicírculos construídos sobre os lados do triângulo retângulo, se a medida do raio utilizado seria a ou $\frac{a}{2}$, devido ao fato de que nessa demonstração o valor de a que é o lado do triângulo retângulo coincide com o diâmetro do semicírculo e não com a medida do raio deste.

No geral, os alunos conseguiram acompanhar e houve boas interferências e interações durante as atividades do segundo dia.

6.4.3 3º dia de aplicação

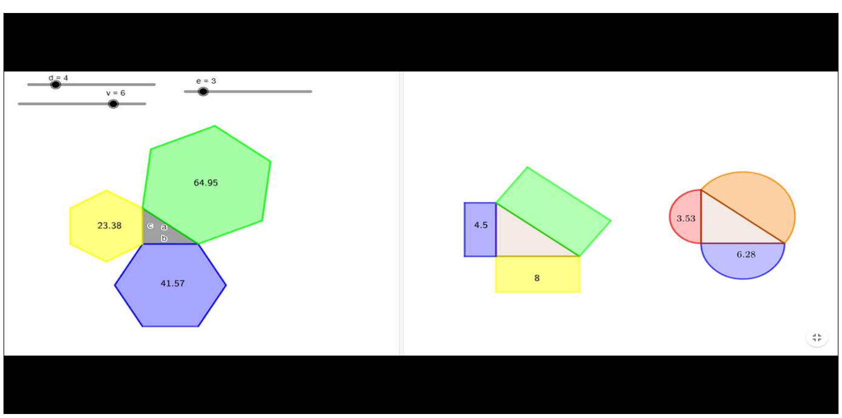
Para o terceiro dia de aplicação da oficina os temas abordados foram: a visualização das extensões do teorema de Pitágoras no *software Geogebra* e a demonstração da generalização do teorema para quaisquer figuras planas semelhantes e proporcionais.

Figura 26 - 3º dia de aplicação da oficina.

Fonte: O autor (2023).

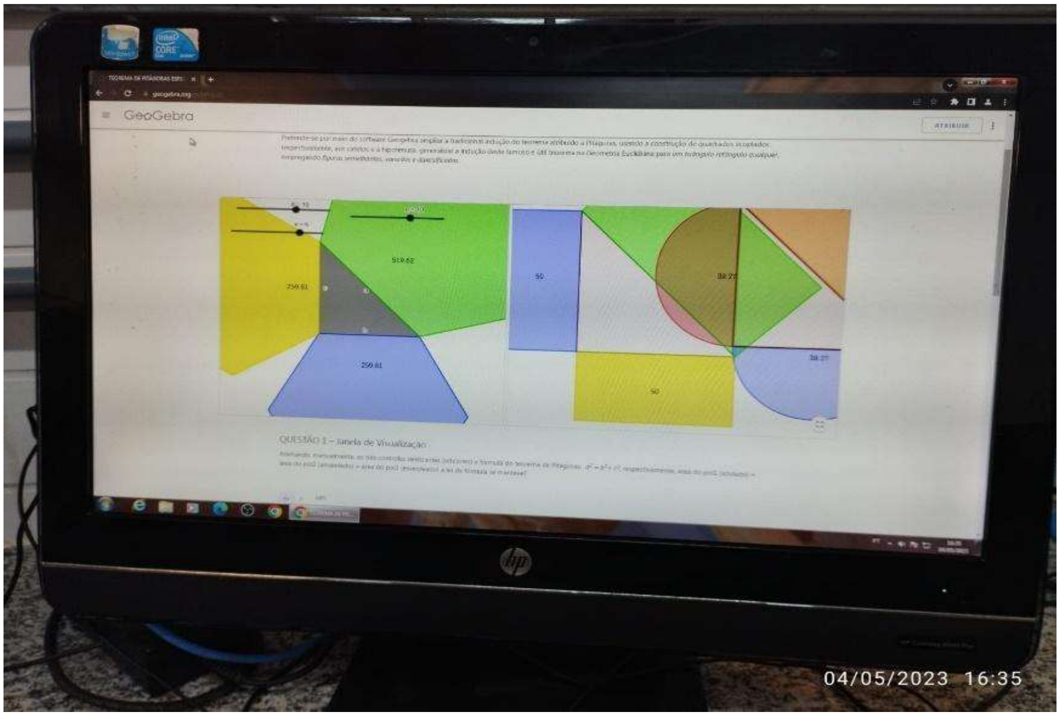
Para a visualização das extensões do Teorema de Pitágoras no *Geogebra*, foi utilizado uma apresentação disponível nos materiais da plataforma do *Geogebra online*, feita por Walter Mendes Monteiro, cujo nome é "TEOREMA DE PITÁGORAS ESPECIAL". O link desta apresentação foi disponibilizado para que os alunos pudessem explorar tal script nos computadores do laboratório de matemática (Figura 27).

Figura 27 - Extensões do Teorema de Pitágoras no *Geogebra*.



Fonte: https://www.geogebra.org/m/hffcycf3

Figura 28 - Tela de um dos alunos explorando as extensões do Teorema de Pitágoras no *GeoGebra*.



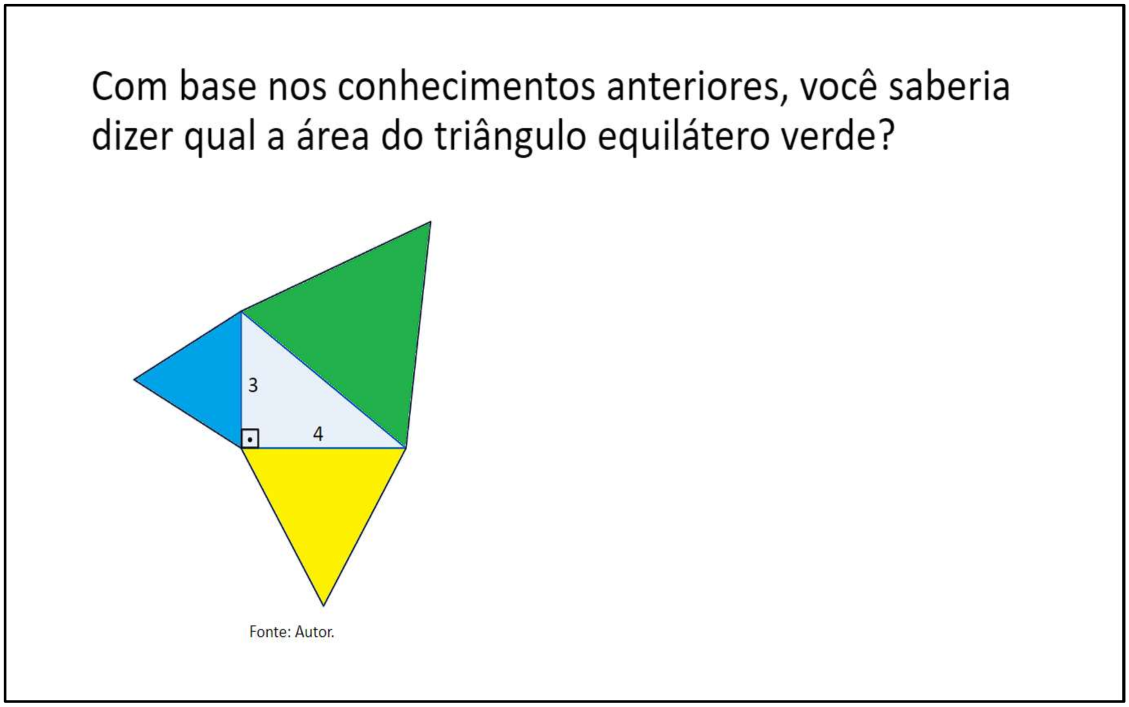
Fonte: O autor (2023).

Como pode-se observar nesta apresentação há um triângulo retângulo com catetos de medida “b” e “c” e hipotenusa “a” e sobre seus lados são construídas figuras planas regulares semelhantes. Além disso, três controles deslizantes, os controles “e” e “d” que medem os lados “b” e “c” do triângulo retângulo e o controle “v” que altera no número de vértices das figuras construídas sobre os lados.

Este material foi utilizado para que os alunos pudessem verificar que área do polígono em verde é igual a soma das áreas dos polígonos azul e amarelo, mesmo que os polígonos mudem de forma (triângulo equilátero, quadrado, hexágono regular) ou mudem a medida do comprimento dos lados.

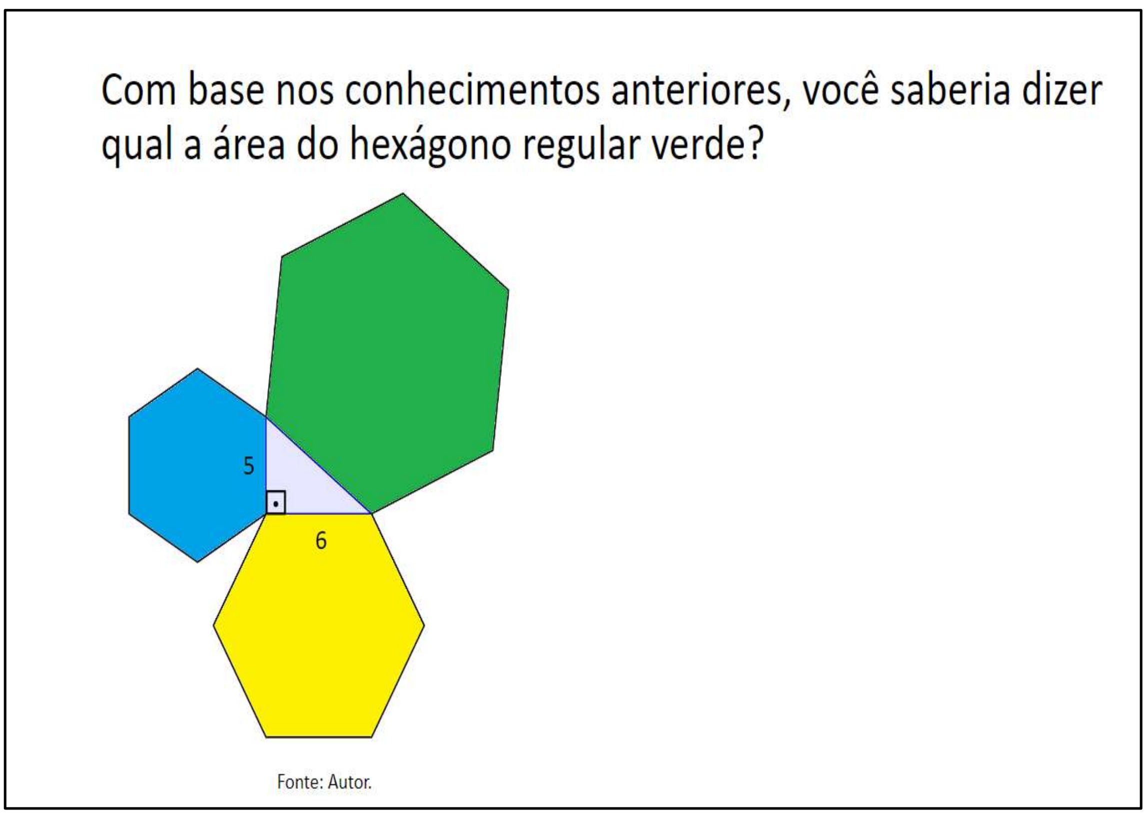
Como no encontro anterior, foram explicadas as extensões do teorema de Pitágoras com triângulo equilátero, hexágono regular e semicírculo. Foi pedido aos alunos que calculassem a área do polígono verde nos seguintes casos utilizando as fórmulas de áreas das figuras planas que já haviam sido apresentadas e que depois verificassem os resultados, comparando no *GeoGebra* (Figuras 29, 30 e 31). Para esta atividade foi permitido o uso de calculadoras, pois o objetivo não são as operações aritméticas em si, e a calculadora é um instrumento que pode ajudar na velocidade e precisão dos cálculos.

Figura 29 - Exercício 1 das extensões do Teorema de Pitágoras.



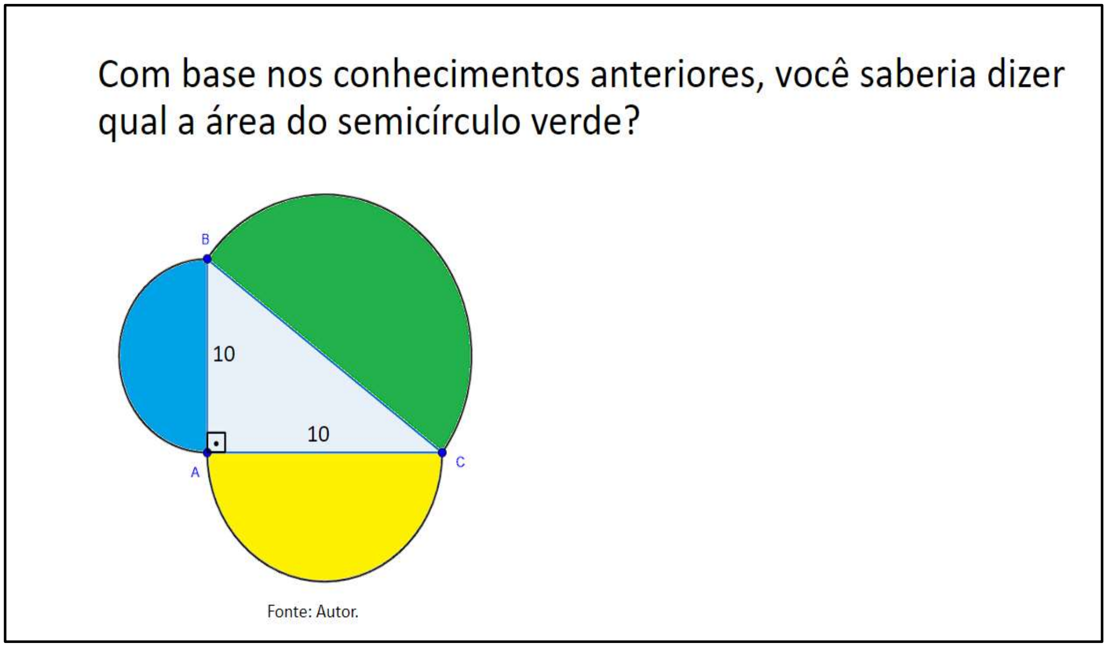
Fonte: O autor (2023).

Figura 30 - Exercício 2 das extensões do Teorema de Pitágoras.



Fonte: O autor (2023).

Figura 31 - Exercício 3 das extensões do Teorema de Pitágoras.



Fonte: O autor (2023).

Durante a realização dos cálculos, um dos participantes fez o seguinte questionamento:

- Aluno B: *Para fazer o teste com o pentágono regular basta calcular a área de um triângulo equilátero e multiplicar o resultado por 5?*

Foi explicado que não é possível fazer tal procedimento para o cálculo da área do pentágono, pois o pentágono regular não possui esta simetria. Esta pergunta foi interessante, pois o aluno tentou associar o procedimento para o cálculo da área de um pentágono regular com a de um hexágono regular onde este procedimento é possível.

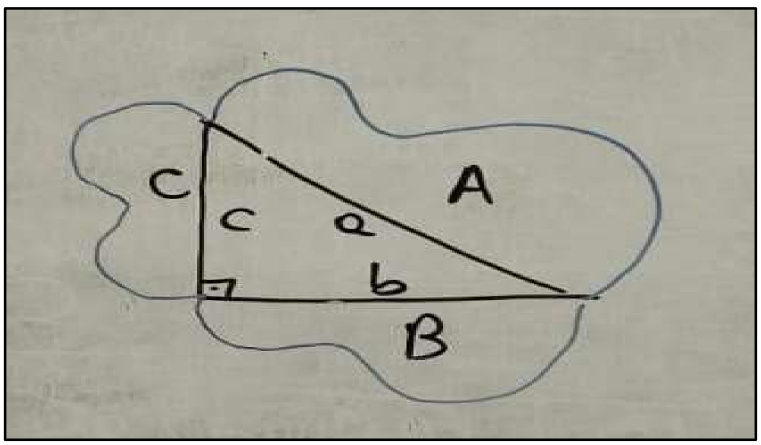
De fato, generalizar resultados em matemática, pode levar a erros conceituais. Entretanto, este tipo de questionamento oportuniza que o professor de matemática explore outros conceitos, tais como simetria, por exemplo.

No exemplo em questão, apesar do teorema de Pitágoras também ser válido para pentágonos, não foi abordado o cálculo de áreas desses polígonos regulares, pois não foi apresentada a maneira de calcular a sua área previamente, sendo esta possível com base na medida do apótema da figura. Foi dada a prioridade para o cálculo de áreas de figuras planas mais exploradas nos livros didáticos como o triângulo equilátero, o hexágono regular e o semicírculo.

Em seguida foi feita uma revisão sobre a seguinte propriedade: “A razão entre as áreas de dois polígonos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança”. Tal propriedade foi demonstrada apenas para triângulos e tomada como verdade para polígonos de n lados. Apesar de haver uma demonstração que justifique tal propriedade para um polígono de n lados esta não foi apresentada pois este não era o foco da pesquisa.

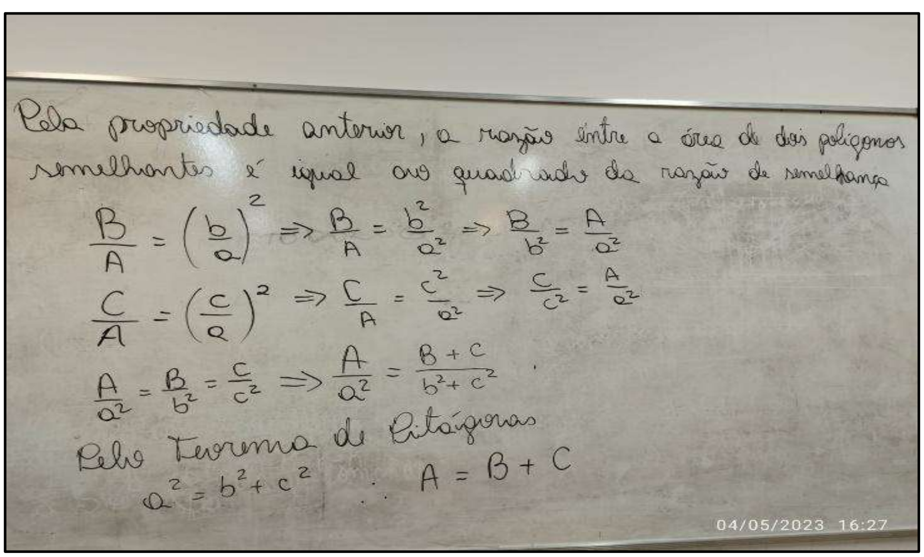
Em posse deste conhecimento, deu-se início a demonstração da generalização do teorema de Pitágoras para outras figuras planas semelhantes. Primeiro foi desenhado um triângulo retângulo qualquer e sobre os seus lados foram construídas figuras planas genéricas, mas de maneira que supomos serem semelhantes (Figura 32). O objetivo foi mostrar que a área da região A é igual à soma das áreas das regiões B e C. Para isso, foi seguido o roteiro do Capítulo 4, Seção 4.4 (Figura 33).

Figura 32 - Regiões gerais proporcionais construídas sobre os lados do triângulo retângulo.



Fonte: O autor (2023).

Figura 33 - Demonstração da generalização do Teorema de Pitágoras feita no quadro branco.



Fonte: O autor (2023).

Durante a explanação dessa demonstração, o silêncio dos alunos era notório, sem intervenções como nas atividades anteriores, possivelmente pelo fato de ser algo mais complexo e que exige um pouco mais de abstração por parte do sujeito. A atividade de abstrair a generalizar resultados, sobretudo demonstrações matemáticas, requer um nível de maturidade algébrica maior. Por outro lado, a observação atenta do pesquisador, sugere que os alunos estavam entusiasmados e engajados a compreender o que significava aquele resultado.

Após a explanação e alguns diálogos, sobre o tema, foi entregue um formulário com algumas perguntas relativas ao conteúdo trabalhado e também sobre a percepção dos participantes em relação à matemática. O questionário também abordou elementos sobre os 3 encontros da oficina (Apêndice A).

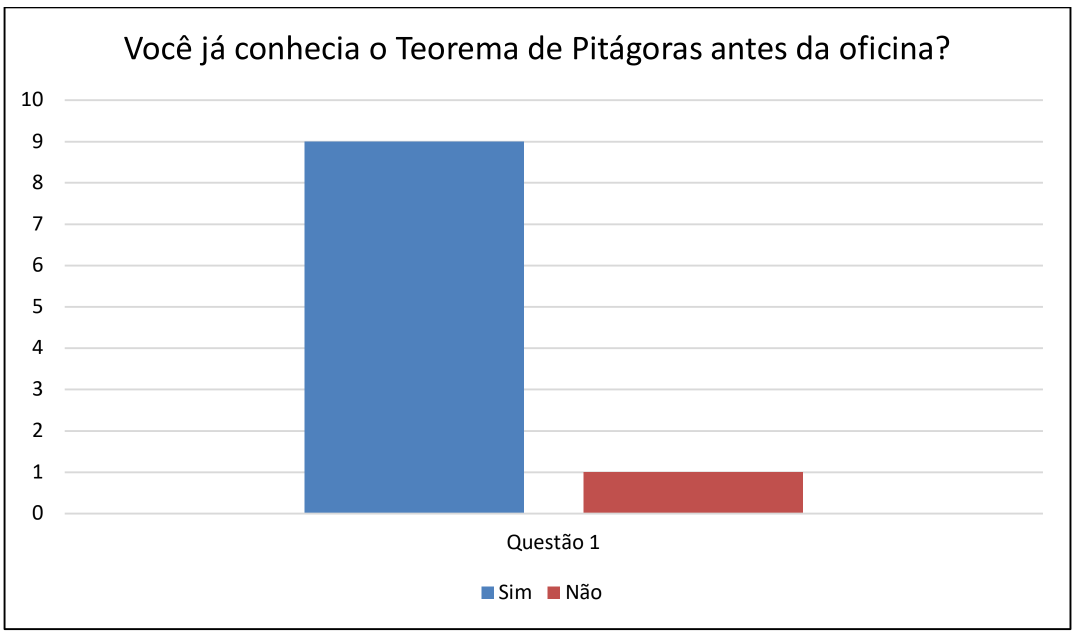
No próximo capítulo deste trabalho, serão analisados os resultados obtidos, olhando mais de perto algumas respostas dos alunos ao questionário aplicado, refletindo sobre o fazer matemática, sobretudo o ensinar matemática, e sobre a abordagem de temas pouco explorados no currículo de matemática, como é o caso do objeto de estudo desta pesquisa.

7 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste capítulo será abordado a análise das respostas obtidas a partir do questionário aplicado no 3º dia de oficina. O questionário consta no Apêndice A e contém 10 perguntas, dentre elas perguntas objetivas e subjetivas, e foi aplicado a todos os 10 alunos participantes.

Para iniciar o questionário foi perguntado se os alunos já conheciam o teorema de Pitágoras antes da oficina e a resposta que predominou foi "SIM". Dentre todos os participantes, apenas um respondeu que "NÃO". Apesar de ser um quantitativo pequeno de alunos, essas respostas nos indicam como o Teorema de Pitágoras é um tópico bem conhecido entre os alunos do Ensino Médio. De fato, tal teorema é um dos mais conhecidos da matemática, havendo mais de 400 demonstrações conhecidas. Na Figura 34, há o resultado da resposta dos participantes.

Figura 34 - Gráfico referente ao quantitativo de alunos que conheciam o teorema de Pitágoras.



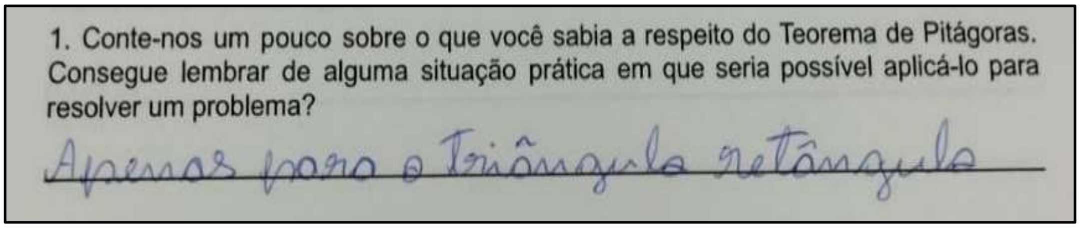
Fonte: O autor (2023).

A seguir será apresentado cada pergunta do questionário e as respostas de alguns alunos que aqui estão identificados por letras A, B, C, e assim por diante. Exemplo: Aluno A, Aluno B, etc.

Pergunta 1. Conte-nos um pouco sobre o que você sabia a respeito do Teorema de Pitágoras. Consegue lembrar de alguma situação prática em que seria possível aplicá-lo para resolver um problema?

Para esta pergunta houve dois caminhos possíveis de respostas, o primeiro é que os alunos não lembravam de alguma situação prática em que haviam aplicado o teorema de Pitágoras e o outro é que aqueles que já o haviam aplicado em exercícios, provas ou questões que envolvam o triângulo retângulo.

Figura 35 - Resposta do aluno A na pergunta 1.

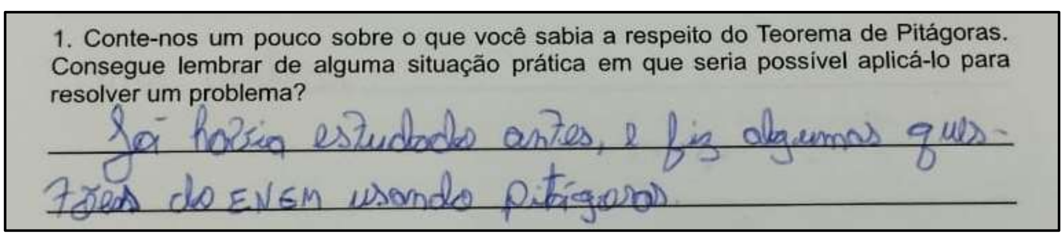

1. Conte-nos um pouco sobre o que você sabia a respeito do Teorema de Pitágoras. Consegue lembrar de alguma situação prática em que seria possível aplicá-lo para resolver um problema?

Apenas para o Triângulo retângulo

Fonte: O autor (2023).

Na Figura 35 vê-se a resposta do Aluno A, que respondeu: "Apenas para o triângulo retângulo". Esse aluno reconhece justamente a figura plana em que o teorema é aplicado, o triângulo retângulo. O que atende a habilidade EF09MA14 da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) "Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes." (BRASIL, 2018, p.319).

Figura 36 - Resposta do aluno B na pergunta 1.

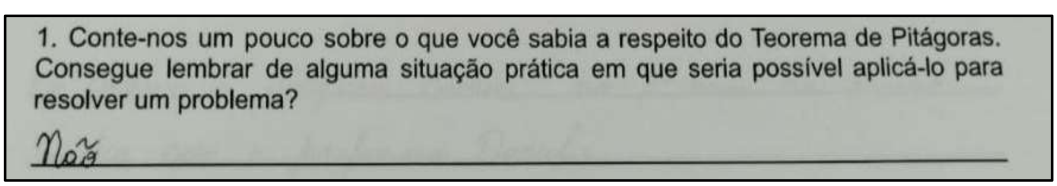

1. Conte-nos um pouco sobre o que você sabia a respeito do Teorema de Pitágoras. Consegue lembrar de alguma situação prática em que seria possível aplicá-lo para resolver um problema?

Já havia estudado antes, e fiz algumas ques-
tões do ENEM usando pitágoras.

Fonte: O autor (2023).

A Figura 36 mostra a resposta do Aluno B: "Já havia estudado antes, e fiz algumas questões do ENEM usando Pitágoras".

Figura 37 - Resposta do aluno C na pergunta 1.

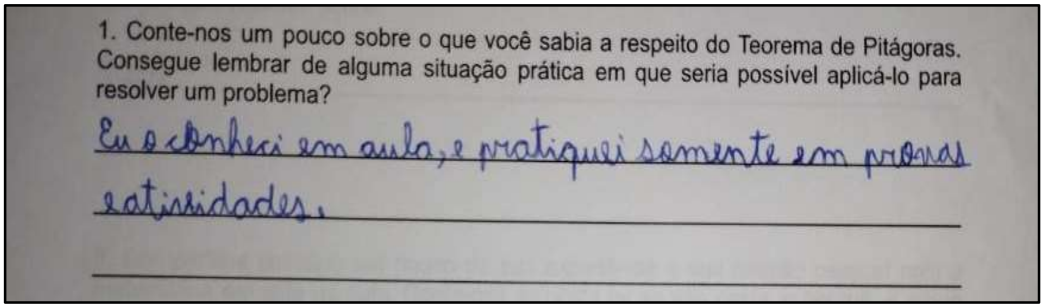

1. Conte-nos um pouco sobre o que você sabia a respeito do Teorema de Pitágoras. Consegue lembrar de alguma situação prática em que seria possível aplicá-lo para resolver um problema?

Não

Fonte: O autor (2023).

Já o aluno C disse: “Não”, encaixando sua resposta no primeiro caminho (Figura 37).

Figura 38 - Resposta do aluno D na pergunta 1.


1. Conte-nos um pouco sobre o que você sabia a respeito do Teorema de Pitágoras. Consegue lembrar de alguma situação prática em que seria possível aplicá-lo para resolver um problema?

Eu o conheci em aula, e pratiquei somente em provas e atividades.

Fonte: O autor (2023).

E o aluno D comentou: "Eu o conheci em aula, e pratiquei somente em provas e atividades” (Figura 38).

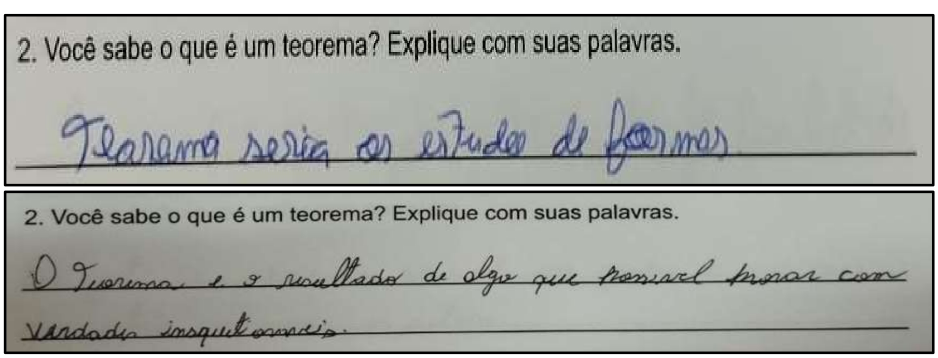
Estas respostas sugerem que o tema é de fato trabalhado em sala de aula e que a maioria dos alunos o retém em sua memória; talvez por ser um conteúdo mais fácil e com aplicações mais palpáveis, do que por exemplo, a função seno, como problemas envolvendo áreas e comprimentos, os alunos têm certa facilidade em lembrar.

Pergunta 2. Você sabe o que é um teorema? Explique com suas palavras.

De acordo com Moraes Filho (2016, p. 65) “A princípio, um teorema é uma sentença matemática condicional ‘Se P, então Q’ ou implicativa ‘P $\Rightarrow$ Q’, da qual existe uma demonstração que garanta sua validade. Nesse caso, chama-se hipótese a sentença P e tese a sentença Q”.

Os alunos não conheciam uma definição formal do que seria um teorema, mas com base em suas experiências eles formularam as suas respostas, conforme observa-se na Figura 39, abaixo.

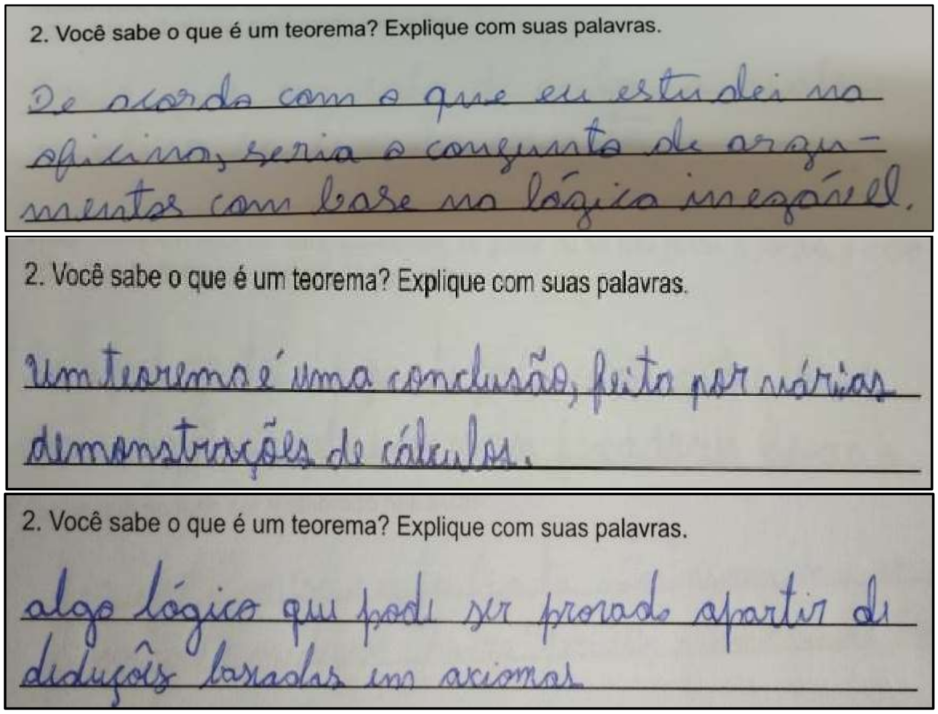
Figura 39 - Resposta dos alunos à pergunta 2.


2. Você sabe o que é um teorema? Explique com suas palavras.

Teorema seria os estudos de formas

2. Você sabe o que é um teorema? Explique com suas palavras.

O Teorema é o resultado de algo que possível provar com verdades inquestionáveis.


2. Você sabe o que é um teorema? Explique com suas palavras.

De acordo com o que eu estudei na oficina, seria o conjunto de argumentos com base na lógica inegável.

2. Você sabe o que é um teorema? Explique com suas palavras.

Um teorema é uma conclusão, feito por várias demonstrações de cálculos.

2. Você sabe o que é um teorema? Explique com suas palavras.

algo lógico qui podi ser provado apartir di diduçõis basiadas em axiomas

Fonte: O autor (2023).

Ao serem perguntados sobre o que os alunos sabiam a respeito de teoremas, as respostas obtidas são bem diversas. Vejamos alguns exemplos do registro escrito pelos participantes:

O Aluno A escreveu: “Teorema seria os estudos de formas”. Nesta resposta parece ocorrer uma confusão com a definição de teorema, já que essa resposta mais se aproxima da definição de Geometria.

O Aluno B disse: "De acordo com o que eu estudei na oficina, seria o conjunto de argumentos com base na lógica inegável”.

O Aluno C respondeu: "O Teorema é o resultado de algo que é possível provar com verdades inquestionáveis”.

Na resposta do Aluno D é dito “Um teorema é uma conclusão, feita por várias demonstrações de cálculos”.

Esta resposta já se parece bem mais com a definição apresentada, já que o aluno menciona os encadeamentos lógicos, necessários para a argumentação matemática. O uso da palavra inegável sugere que, para o aluno, um enunciado matemático possui a caraterística de verdade absoluta. O Aluno C fornece outra resposta bem próxima da definição também, mas que contém a mesma noção de que a matemática carrega verdades absolutas, que não podem ser questionadas ou colocadas em xeque.

Geralmente, quando ouve-se falar no senso comum que a matemática é uma ciência “exata”, há a impressão de que seus enunciados não podem ter ambiguidades ou que na matemática não há espaço para imprecisões. Entretanto, um fato matemático só é verdadeiro no mundo real, se as premissas, isto é, os axiomas postulados inicialmente para o desenvolvimento da teoria forem coerentes com o mundo real. Se isto não ocorrer, pode haver uma demonstração correta do ponto de vista matemático, mas que não se aplica ao mundo físico, ou que até mesmo conduza a resultados equivocados.

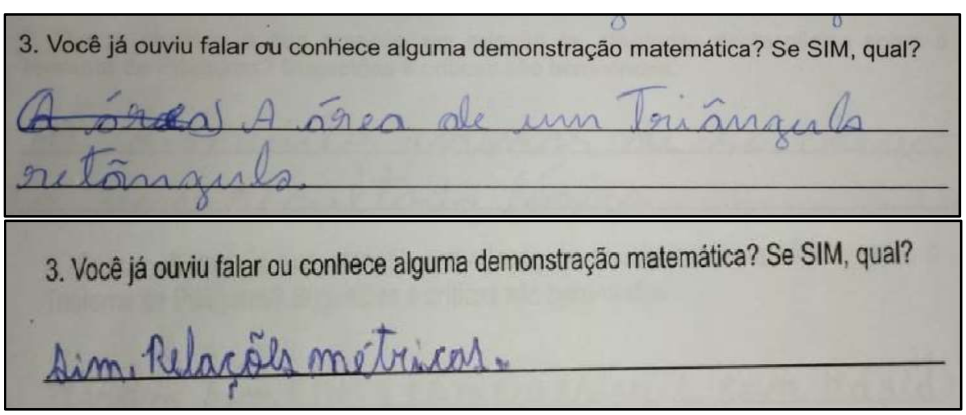
O Aluno E menciona em sua resposta que a demonstração deve ser baseada em axiomas, ou seja, parte da ideia de que algo é tomado como verdadeiro e a partir daí são construídas argumentações lógicas que não contradizem o que foi postulado inicialmente como verdade. Esta resposta é a que mais se aproxima do correto conceito matemático de teorema. É possível que este aluno tenha aprendido tal ideia durante a oficina ou que já possuía previamente tal conhecimento. Para responder a esta pergunta seria necessário ter aplicado o mesmo questionário antes e após as atividades para comparar as respostas, o que não foi feito, e portanto, não é possível afirmar se o aluno adquiriu este conhecimento durante a oficina ou não.

Como não é o objetivo deste trabalho discutir sobre a epistemologia das demonstrações matemáticas, fica apenas esta reflexão e possibilidade de investigação deste tema em um trabalho futuro.

Pergunta 3. Você já ouviu falar ou conhece alguma demonstração matemática? Se SIM, qual?

A esta pergunta, sete dos alunos responderam “NÃO”. Isto nos evidencia como as demonstrações matemáticas são pouco trabalhadas no Ensino Médio. Veja a seguir as três respostas dos alunos que demonstraram ter algum conhecimento em demonstrações.

Figura 40 - Resposta dos Aluno A e Aluno D à pergunta 3.


3. Você já ouviu falar ou conhece alguma demonstração matemática? Se SIM, qual?

~~A área~~ A área de um Triângulo retângulo.

3. Você já ouviu falar ou conhece alguma demonstração matemática? Se SIM, qual?

Sim, Relações métricas.

Fonte: O autor (2023).

- Resposta do Aluno A: *A área de um triângulo retângulo*.
- Resposta do Aluno D: *Sim, relações métricas.*

Aqui o Aluno A provavelmente confundiu a expressão para o cálculo da área do triângulo, chamando-a de "demonstração", talvez por atribuir o sentido desta palavra ao seu uso no senso comum, mas não no sentido matemático. É comum que tais usos contribuam para as dificuldades de entendimento de conteúdos matemáticos, já que nem sempre as palavras em matemática têm o mesmo sentido daqueles na língua portuguesa. Coura, citando Devlin, enfatiza a simbiose que existe entre a matemática e a língua materna ao mencionar que:

> Existe uma capacidade subjacente à linguagem, que temos desde o momento em que nascemos? Sim, a capacidade de reconhecer padrões, afirma Devlin (2004). Ao investigar o talento para lidar com números e a evolução do pensamento matemático, o autor lança uma visão alternativa da mente humana como um instrumento de reconhecer padrões, afirmando que alguns dos padrões que reconhecemos podem ser descritos através da linguagem. (COURA, 2018, p. 3)

Machado (1989, p. 165) enfatiza que a matemática transcende o âmbito da escrita,

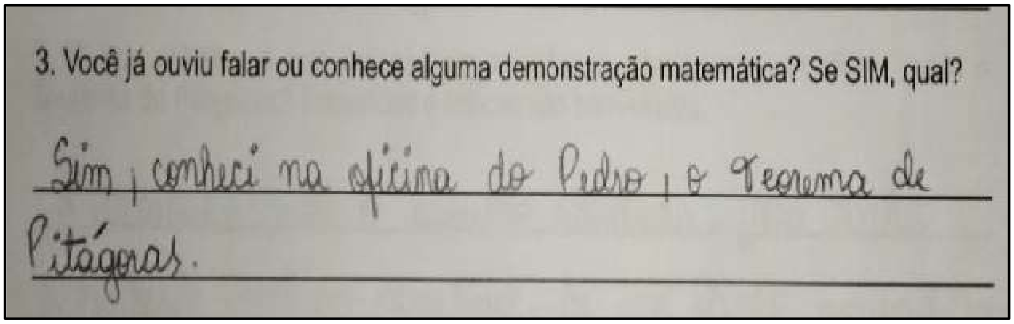
> [...] caracterizando-se como um instrumento para o mapeamento da realidade. Nesse caso, a língua oral assume uma importância fundamental também no ensino da Matemática e como a escrita matemática não comporta a oralidade, esta deve ser emprestada da Língua Materna."

Um exemplo que ocorre com bastante frequência no senso comum é utilizar a expressão "crescimento exponencial" para referir-se a algum fenômeno que aumenta rapidamente, ou que apresenta um crescimento acentuado. Entretanto, nem toda curva exponencial cresce de maneira rápida ou acentuada, havendo inclusive exponenciais decrescentes. O uso sem o devido cuidado de expressões como estas, pode contribuir para que o sujeito tenha dificuldades em atribuir o correto significado matemático ao termo, cabendo ao professor de matemática, esclarecer o aluno sobre tais questões, pois não são óbvias.

> Nesse sentido, é possível afirmar que linguagem e matemática são correlatas: "ambas se tornam possíveis pela mesma característica do cérebro humano" (DEVLIN, 2004, p.37); pois é justamente esse pensar desconectado, a respeito de entes abstratos, a condição necessária ao desenvolvimento do pensamento matemático. Sob esse aspecto, Matemática e Língua Materna possuem a mesma raiz, a mesma origem; "a capacidade matemática é nada mais do que a capacidade lingüística usada de maneira ligeiramente diferente" (DEVLIN, 2004, p.37). (COURA, 2018, p. 4)

No caso do Aluno D, este está se referindo às relações métricas de um triângulo retângulo, que conforme já mencionado neste trabalho, aparecem nos livros didáticos de matemática do Ensino Médio, sendo geralmente trabalhadas pelos professores antes de aplicar o teorema para resolver problemas.

Figura 41 - Resposta do aluno E na pergunta 3.



3. Você já ouviu falar ou conhece alguma demonstração matemática? Se SIM, qual?

Sim, conheci na oficina do Pedro, o Teorema de Pitágoras.

Fonte: O autor (2023).

O Aluno E descreveu ter conhecido durante a aplicação da oficina, porém não especificou qual demonstração, o que sugere que foi seu primeiro contato com demonstrações matemáticas.

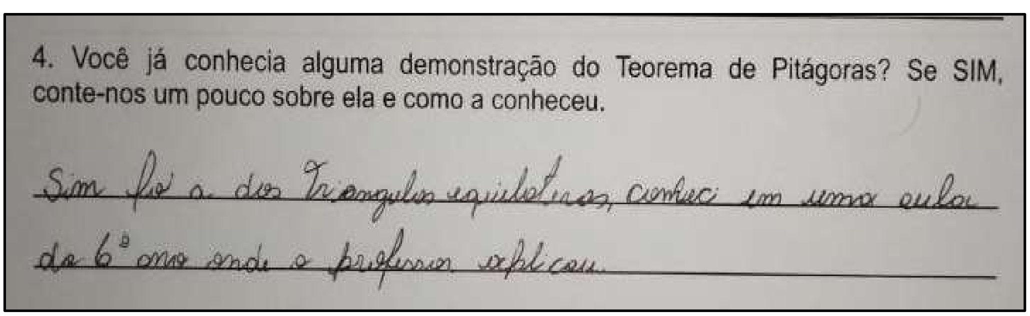
Pergunta 4. Você já conhecia alguma demonstração do Teorema de Pitágoras? Se SIM, conte-nos um pouco sobre ela e como a conheceu.

Aqui nove dos dez participantes responderam "NÃO". Apesar de conhecerem o teorema, nunca haviam visto uma demonstração deste. Apenas o Aluno C disse ter visto uma demonstração; em sua fala o aluno afirma:

- Aluno C: "*Sim foi a dos triângulos equiláteros, conheci em uma aula do 6º ano onde o professor aplicou*".

Pelo contexto em que essa resposta foi dada, o aluno deveria estar se referindo a uma das extensões do teorema de Pitágoras e não com a demonstração propriamente dita. O registro da resposta do aluno C está mostrado na Figura 42.

Figura 42 - Resposta do aluno C na pergunta 4.



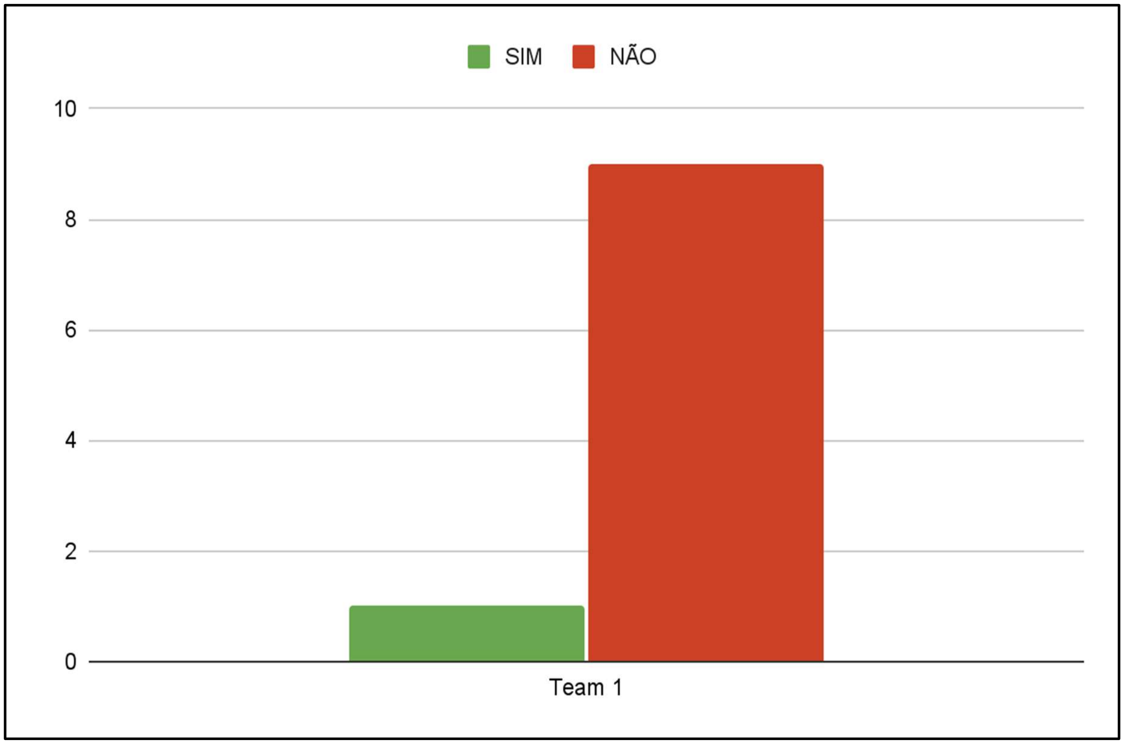
4. Você já conhecia alguma demonstração do Teorema de Pitágoras? Se SIM, conte-nos um pouco sobre ela e como a conheceu.

Sim foi a dos Triangulos equileteros, conheci em uma aula do 6º ano onde o professor aplicou.

Fonte: O autor (2023).

Pergunta 5. Você já tinha conhecimento de que o Teorema de Pitágoras é verdadeiro e se aplica para outras figuras planas que não apenas quadrados?

Figura 43 - Gráfico das respostas da Pergunta 5.



Fonte: O autor (2023).

Com base na resposta anterior, o único aluno que marcou "SIM" foi o Aluno C. Os demais desconheciam a interpretação geométrica e a validade do teorema de Pitágoras com outras figuras planas diferentes de quadrados, o que sugere, apesar de ser uma amostra pequena, que a grande maioria dos estudantes desconhece tal fato.

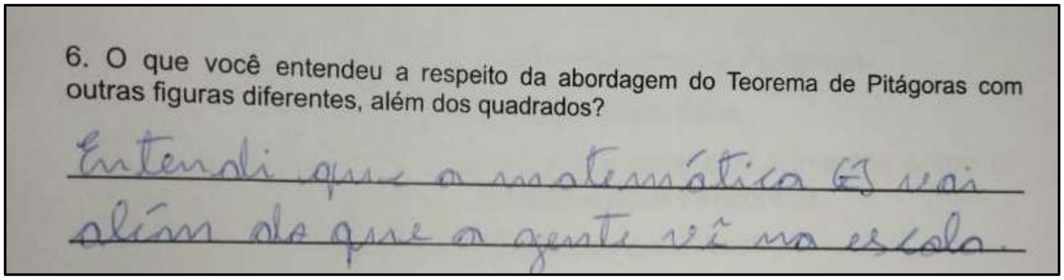
Pergunta 6. O que você entendeu a respeito da abordagem do Teorema de Pitágoras com outras figuras diferentes além dos quadrados?

Esta foi uma pergunta da qual saíram diversas respostas interessantes. Na Figura 44 temos a resposta do Aluno A, que escreveu:

- Aluno A: *"Entendi que a matemática vai além do que a gente vê na escola".*

Esta resposta mostra como o Aluno A tem consciência que a disciplina não está atrelada apenas aos conteúdos que ele vê em sala de aula, mas que há outras possibilidades. Muito se discute até que ponto a matemática trabalhada no currículo da educação básica pode ser mais flexível e trazer temáticas diferenciadas para a sala de aula. Entretanto, há uma preocupação dos professores em cumprir o conteúdo do ano letivo, que é bastante extenso, o que contribui para que não haja tempo suficiente para inserir outros temas nas aulas.

Figura 44 - Resposta do aluno A na pergunta 6.


6. O que você entendeu a respeito da abordagem do Teorema de Pitágoras com outras figuras diferentes, além dos quadrados?

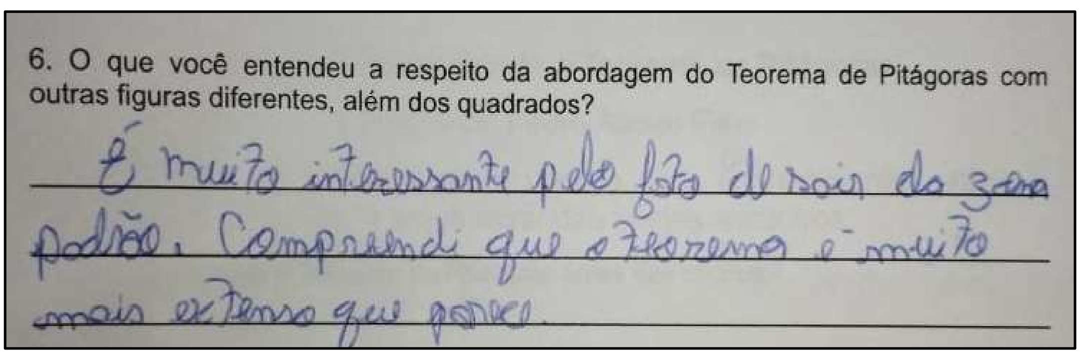
Entendi que a matemática vai além do que a gente vê na escola.

Fonte: O autor (2023).

Consoante ao Aluno A, conforme pode-se visualizar na Figura 45, o Aluno B tem uma resposta bem semelhante: *"É muito interessante pelo fato de sair da zona padrão. Compreendi que o teorema é muito mais extenso que parece".*

Esta resposta mostra como a oficina foi capaz de despertar no aluno uma expansão da noção que o mesmo tinha sobre o teorema de Pitágoras. Este tipo de percepção pode ajudar o aluno a articular que não apenas este conteúdo ou apenas conteúdos em matemática possuem esta característica, mas que em outras áreas do conhecimento também há possibilidades para o aprofundamento e que mergulhar rumo à ciência e ao conhecimento pode revelar formas de pensar, raciocinar, um mundo de novas possibilidades e ideias inimagináveis.

Figura 45 - Resposta do aluno B na pergunta 6.

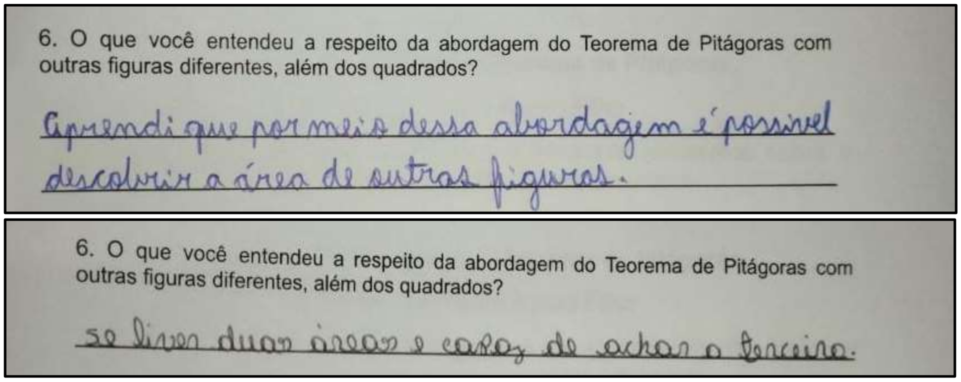

6. O que você entendeu a respeito da abordagem do Teorema de Pitágoras com outras figuras diferentes, além dos quadrados?

É muito interessante pelo fato de sair da zona padrão. Compreendi que o teorema é muito mais extenso que parece.

Fonte: O autor (2023).

Na Figura 46, vê-se que as respostas dos Alunos D e E associam o tema estudado como uma ferramenta útil para solucionar problemas de áreas. De fato, um dos principais enfoques que se dá no Ensino Médio ao teorema de Pitágoras, refere-se a problemas envolvendo comprimentos dos lados do triângulo, contextualizando com alguma situação prática do dia a dia, como altura de torres, de prédios, escadas, etc. Problemas envolvendo áreas são menos explorados, ainda que muito importantes. Assim, esta percepção do aluno abre novas possibilidades de utilização da ferramenta matemática, e espera-se que este possa questionar-se também a respeito de outros conteúdos, sobre suas aplicações.

Figura 46 - Resposta dos alunos D e E na pergunta 6.


6. O que você entendeu a respeito da abordagem do Teorema de Pitágoras com outras figuras diferentes, além dos quadrados?

Aprendi que por meio dessa abordagem é possível descobrir a área de outras figuras.

6. O que você entendeu a respeito da abordagem do Teorema de Pitágoras com outras figuras diferentes, além dos quadrados?

se tiver duas áreas é capaz de achar a terceira.

Fonte: O autor (2023).

Pergunta 7. Você já conhecia o *software Geogebra* ou outro *software* de matemática? Conte-nos um pouco sobre.

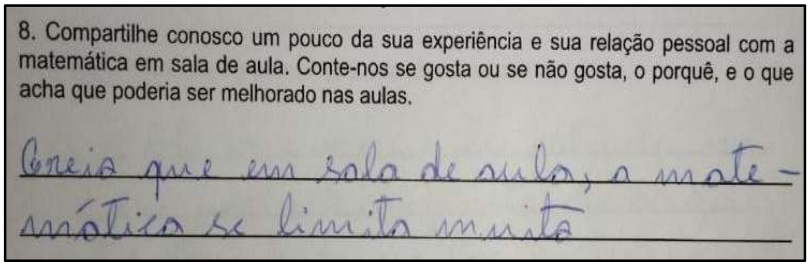
Aqui as respostas ficaram bem divididas. Cinco alunos disseram que conheciam e os demais responderam que não. Os alunos que responderam que conheciam eram todos da mesma turma e suas respostas iam de encontro com o fato de a professora de matemática do 1º ano ter usado o *software GeoGebra* em suas aulas.

Pergunta 8. Compartilhe conosco um pouco da sua experiência e sua relação pessoal com a matemática em sala de aula.

Sendo esta a penúltima pergunta, as respostas fornecidas foram bem diversificadas. O Aluno A diz "Creio que em sala de aula a matemática se limita muito". Esta ideia corrobora com os antigos PCN's (1998, p. 22) "O que também se observa em termos escolares é que muitas vezes os conteúdos matemáticos são tratados isoladamente e são apresentados e exauridos num único momento."

Esta limitação que o próprio aluno cita, pode ser atribuída a diversos fatores, como pouco engajamento das turmas em relação à Matemática, ou mesmo falta de iniciativa dos professores que preferem ficar em suas zonas de conforto e apenas trabalhar o conteúdo de forma mais limitada, ou mesmo ao fator que já foi mencionado anteriormente, a alta densidade de conteúdos, que pode comprometer a qualidade do processo de ensino e aprendizagem, haja vista que não há tempo suficiente para que os tópicos sejam trabalhados de maneira mais aprofundada. Contudo, uma sugestão factível, é que durante o ano letivo, o professor escolha alguns temas diferentes e possa propor trabalhos de aprofundamento em grupos, o que pode contribuir para melhorar o ensino de matemática, despertando o interesse e a participação ativa dos alunos.

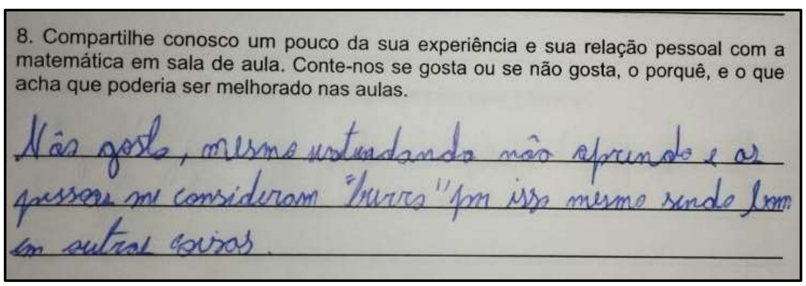
Figura 47 - Resposta do aluno A na pergunta 8.



Fonte: O autor (2023).

Já o Aluno B responde “Não gosto, mesmo estudando não aprendo e as pessoas me consideram ‘burro’ por isso mesmo sendo bom em outras coisas”.

Figura 48 - Resposta do aluno B na pergunta 8.



Fonte: O autor (2023).

Com base na externalização de seu sentimento em relação à matemática, alguns fatos podem ser observados na resposta deste participante: o primeiro é a dificuldade que ele cita ter em aprender matemática. Sua dificuldade pode estar associada com algum transtorno de aprendizagem ou simplesmente pelo fato de não gostar da disciplina, como o próprio sujeito enfatiza ao dizer “Não gosto…”. Outro fator importante a ser observado é a sua consciência em relação ao que as outras pessoas pensam a seu respeito simplesmente por conta da sua dificuldade com a matemática, mesmo ele considerando-se “bom” em outras áreas.

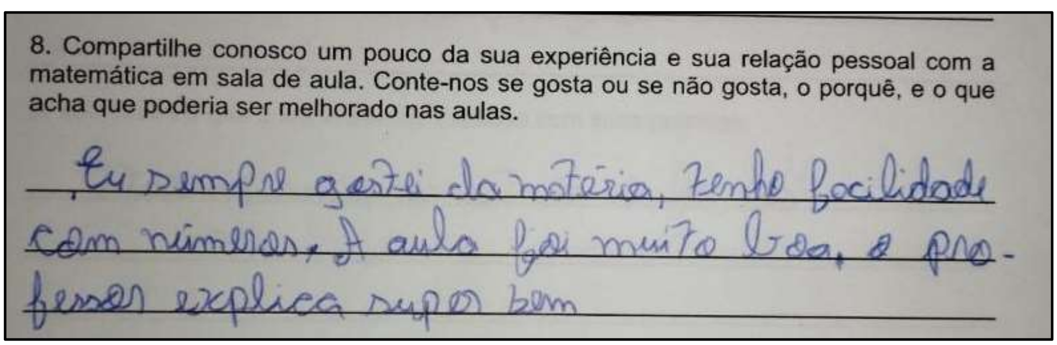
Este pensamento entra em acordo com os PCN’s (1998, p. 29):

> Em sociedade, a Matemática usufrui de um status privilegiado em relação a outras áreas do conhecimento, e isso traz como consequência o cultivo de crenças e preconceitos. Muitos acreditam que a Matemática é direcionada às pessoas mais talentosas e também que essa forma de conhecimento é produzida exclusivamente por grupos sociais ou sociedades mais desenvolvidas.

Este não é um caso isolado, muitos alunos que possuem dificuldade com matemática podem ter domínio em outras áreas do conhecimento como Língua Portuguesa, música, dança, jogos entre outras. Historicamente tem sido atribuída à matemática essa responsabilidade de “separar” quem é inteligente, quem é mais esperto, quem é o melhor aluno. Outro discurso proliferado até mesmo em ambientes acadêmicos, é o de que a Matemática “desenvolve o raciocínio, o pensamento lógico. Machado (1989, p. 162) enfatiza que o raciocínio e organização do pensamento lógico, sobretudo em crianças, está muito mais associado ao aprendizado da Língua Materna em sua forma oral do que à Matemática, haja vista que há uma disparidade significativa entre a alfabetização na língua e a alfabetização matemática desde o início da vida escolar. Portanto, há evidências e corroborações teóricas para endossar a colocação do aluno, sobre seu descontentamento e rotulação simplesmente por ter dificuldades em Matemática.

Por outro lado, o Aluno C já possui facilidade com a matéria, o mesmo diz “Eu sempre gostei da matéria, tenho facilidade com números. A aula foi muito boa, o professor explica super bem”. Aqui, vê-se o outro lado da moeda, que representa os alunos que gostam e tem facilidade com a matemática. Espera-se que estes possam alavancar seus conhecimentos e estudos, porém, a preocupação principal deste trabalho é com relação àqueles que possuem maiores dificuldades, para que o ensino de Matemática seja inclusivo e acessível a todos, mesmo tratando-se de temáticas mais complexas, como o objeto de estudo desta pesquisa.

Figura 49 - Resposta do aluno C na pergunta 8.



8. Compartilhe conosco um pouco da sua experiência e sua relação pessoal com a matemática em sala de aula. Conte-nos se gosta ou se não gosta, o porquê, e o que acha que poderia ser melhorado nas aulas.

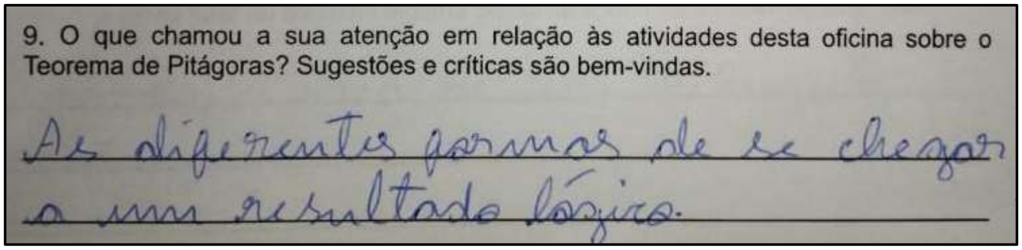
Eu sempre gostei da matéria, tenho facilidade com números, A aula foi muito boa, o professor explica super bem

Fonte: O autor (2023).

Pergunta 9. O que chamou a sua atenção em relação às atividades em relação às atividades desta oficina sobre o Teorema de Pitágoras? Sugestões e críticas são bem-vindas.

Esta é a última pergunta do questionário. O Aluno A respondeu "As diferentes formas de se chegar a um resultado lógico”.

Figura 50 - Resposta do aluno A na pergunta 9.


9. O que chamou a sua atenção em relação às atividades desta oficina sobre o Teorema de Pitágoras? Sugestões e críticas são bem-vindas.

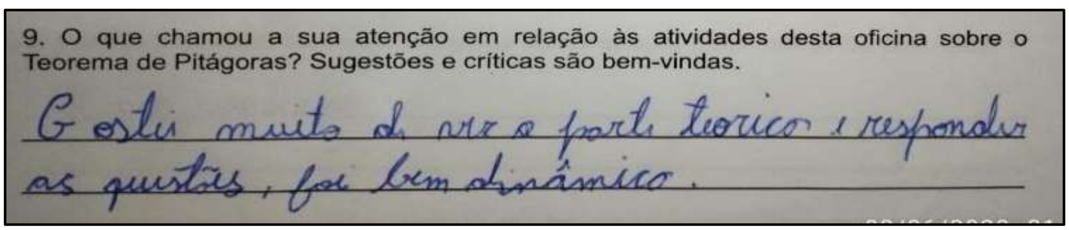
As diferentes formas de se chegar a um resultado lógico.

Fonte: O autor (2023).

Esta resposta se encaixa em vários momentos da oficina seja por ter sido apresentadas 2 demonstrações do teorema de Pitágoras, seja por ter sido ensinado a encontrar a área de uma terceira figura plana a partir das áreas de outras duas com as extensões do teorema.

Já o Aluno B diz: “Gostei muito de ver a parte teórica e responder as questões, foi bem dinâmico.”

Figura 51 - Resposta do aluno B na pergunta 9.

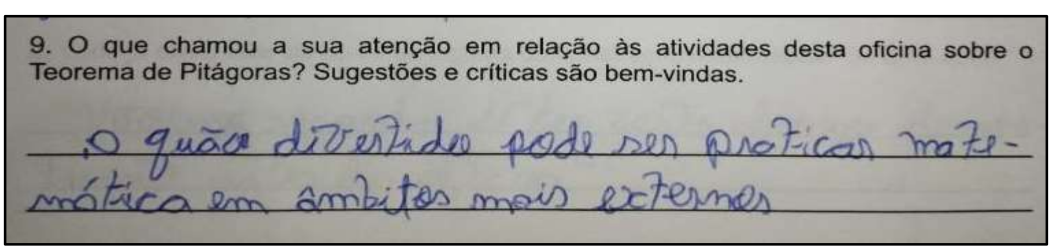

9. O que chamou a sua atenção em relação às atividades desta oficina sobre o Teorema de Pitágoras? Sugestões e críticas são bem-vindas.

Gostei muito de ver a parte teorico e responder as questões, foi bem dinâmico.

Fonte: O autor (2023).

A resposta do Aluno C foi: “O quão divertido pode ser a prática matemática em âmbitos mais externos”. Aqui é possível verificarmos como o fato de a oficina ter ocorrido fora da sala de aula, no Laboratório de Matemática, talvez tenha influenciado o interesse do aluno. Estas práticas, são sempre bem vindas, pois o professor pode levar a turma a um laboratório, ou mesmo a um ambiente externo, em contato com a natureza e trabalhar vários aspectos dos conteúdos de maneira mais dinâmica.

Figura 52 - Resposta do aluno C na pergunta 9.


9. O que chamou a sua atenção em relação às atividades desta oficina sobre o Teorema de Pitágoras? Sugestões e críticas são bem-vindas.

O quão divertido pode ser prática mate-mática em âmbitos mais externos

Fonte: O autor (2023).

Lucena (2017, p. 9) cita que a prática de ensino e aprendizagem de matemática em laboratório "é o espaço propício e indispensável ao contexto escolar, em que há um ambiente favorável à aproximação da matemática teórica com a matemática prática."

Diante destas colocações e reflexões acerca da aplicação desta pesquisa, finaliza-se aqui a análise das atividades desenvolvidas e das respostas dos alunos ao questionário aplicado. No próximo capítulo, serão feitas as considerações finais e finalização deste trabalho.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo apresentar algumas demonstrações e a generalização do teorema de Pitágoras para estudantes do 2º ano do Ensino Médio do Instituto Federal do Amapá. Com isto espera-se fornecer elementos que possam contribuir para com o ensino da Matemática, sobretudo da Geometria, por meio da exploração de temas diferentes e pouco abordados na educação básica. Sabe-se que os alunos em geral possuem muitas dificuldades em Matemática o que torna o processo de ensinar e aprendê-la, muitas vezes, "doloroso". Uma das propostas deste trabalho, é que o sujeito não apenas utilize o teorema de Pitágoras de forma mecânica, decorada, limitada a resolver exercícios clássicos, mas que ele também desenvolva a habilidade de abstrair seus significados, consiga compreender as etapas de uma demonstração matemática e seja capaz de aplicar o teorema na resolução de problemas, em contextos diferentes dos usuais.

O tempo curto para aplicação, apenas três encontros, foi um fator limitante para que houvesse um maior aprofundamento da temática e abordagens com aplicações em outras áreas, como Física, Química e Biologia, que são possíveis a partir dos conceitos expostos aqui. Outro fator a considerar, que deixamos como sugestão para trabalhos futuros, é a aplicação desta abordagem do teorema de Pitágoras para alunos do ensino superior, de graduação em Matemática ou Física, haja vista que durante alguns diálogos, percebeu-se que este tema ainda era desconhecido da maioria dos alunos da graduação com quem houve contato e conversas informais.

Espera-se que este trabalho possa contribuir para que haja reflexão sobre as diversas possibilidades que um determinado conteúdo matemático possui, muitas vezes deixadas de lado, mas que podem gerar bons frutos na educação, seja estimulando os alunos a gostarem de matemática, ou mesmo aprofundando o conhecimento e aprimorando suas habilidades matemáticas como o estímulo do pensamento geométrico, algébrico e abstrato a partir do contato com as demonstrações matemáticas. Além disso, é possível incentivar o uso de *softwares* de matemática, como o *GeoGebra*, pelos professores de Matemática e discentes. Vale ressaltar que não é o objetivo deste trabalho discutir o uso de tecnologias nas aulas de matemática, tendo sido o *GeoGebra* utilizado como uma ferramenta adequada à aplicação, mas não como objetivo principal do trabalho.

REFERÊNCIAS

AUGUSTO, Cleiciele Albuquerque *et al*. **Pesquisa Qualitativa**: rigor metodológico no tratamento da teoria dos custos de transação em artigos apresentados nos congressos da sober. Revista de Economia e Sociologia Rural, [*s. l.*], v. 51, n. 4, p. 745-764, dez. 2013.

BELTRÃO, Isabel Socorro *et al*. **Jogos matemáticos e suas possibilidades pedagógicas para o ensino das operações com números naturais**. Revista de Educação, Ciências e Matemática. v.7, n.3, p.118-132, setembro/dezembro, 2017. Disponível em: http://publicacoes.unigranrio.edu.br/index.php/recm/article/view/3998/2605. Acesso em: 8 de Jun. 2023.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: terceiro e quarto ciclos: Matemática. Brasília: MECSEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 29 mai. 2023.

BOYER, Carl Benjamin; MERZBACH, Uta Caecilia. **História da matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012. 504 p. Tradução da 3.ª edição americana.

CARNEIRO, Letícia de Nazaré Souza. **Aprendizagem da matemática:** dificuldades para aprender conteúdos matemáticos por estudantes do Ensino Médio. 2018. 42 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal do Pará, Castanhal, PA, 2018.

COSTA, Alexandre; BONETE, Izabel Passos. **Geometria Dinâmica**: uma investigação no curso de Licenciatura em Matemática. XV Encontro Paranaense de Educação Matemática, Londrina, p. 1-14, 10 out. 2019.

CRUZ, Alessandra Miranda. **Uma abordagem didática para o teorema de Pitágoras.** 2015. 21 f. TCC (Graduação) - Curso de Especialização em Matemática, Mídias Digitais e Didáticas Para Educação Básica, Polo de Três Passos, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Três Passos - Rs, 2015.

COURA, F. C. F. **Matemática e língua Materna:** propostas para uma interação positiva. X Ebrapem – Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática. Anais [...]. Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2006. Disponível em: <www.fae.ufmg.br/ebrapem/comunicações>. Acesso em: 02 ago. 2018.

DIAS, Adelmo Araujo. **Uso do *GeoGebra* no ensino de probabilidade aplicável ao ensino básico**. 2022. 148 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Profmat), Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana, BA, 2022.

Instituto Federal do Amapá (Macapá). **Projeto Pedagógico do Curso (PPC) de Licenciatura em Matemática.** Macapá: Ifap, 2016. 131p.

LUCENA, Regilania da Silva. **Laboratório de ensino de Matemática**. Fortaleza Ce: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, 2017. 94 p.

MACHADO, Nilson José. **Matemática e língua materna**: uma aproximação necessária. Revista da Faculdade de Educação, São Paulo, v. 15, n. 2, p. 161 - 166, jul/dez, 1989. Disponível em: <https://www.revistas.usp.br/rfe/article/view/33439/36177>. Acesso em: 08. jun. 2023.

MACHIAVELO, António. **Pitágoras**: factos e lendas. Gazeta da Matemática, Porto, p. 18-20, 06 abr. 2009. Departamento de Matemática Pura da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.

MORAIS FILHO, Daniel Cordeiro de. **Um Convite à Matemática**: com técnicas de demonstração e notas históricas. 3. ed. Campina Grande: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016.

RIBEIRO, Jackson. **Matemática:** Ciência, Linguagem e Tecnologia - v. 1. São Paulo: Scipione, 2012. 384 p.

SILVA, Paulo Henrique das Chagas *et al*. Provar pra quê? Concepções sobre a demonstração Matemática. In: VII CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, 7., 2020, Maceió - Al. **Anais** [...]. Maceió - Al: Conedu, 2020. p. 1-12.

OLIVEIRA FILHO, Amaro José de. **O teorema de Pitágoras**. 2016. 74 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Profmat), Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2016.

UJIIE, Nájela Tavares *et al*. Os conhecimentos prévios de matemática de estudantes do ensino fundamental: o que é matemática? de onde ela veio? como seria um mundo sem matemática?. **Alexandria**: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, Florianópolis, v. 10, n. 1, p. 57, 30 maio de 2017.

SOUZA, Helington Franzotti Araújo de. **O uso do *Geogebra* na construção do conhecimento matemático por alunos do 2º ano do ensino médio**: Uma Abordagem a Partir da Teoria dos Registros de Representação Semiótica. 2015. 92 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal do Pará, Breves, PA, 2015.

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO PARA OS PARTICIPANTES

Você conhece o **TEOREMA DE PITÁGORAS**?

(   ) Sim   (   ) Não

1. Conte-nos um pouco sobre o que você sabia a respeito do Teorema de Pitágoras. Consegue lembrar de alguma situação prática em que seria possível aplicá-lo para resolver um problema?

____

____

____

2. Você sabe o que é um teorema? Explique com suas palavras.

____

____

____

3. Você já ouviu falar ou conhece alguma demonstração matemática? Se SIM, qual?

____

____

____

4. Você já conhecia alguma demonstração do Teorema de Pitágoras? Se SIM, conte-nos um pouco sobre ela e como a conheceu.

____

____

____

5. Você já tinha conhecimento de que o Teorema de Pitágoras é verdadeiro e se aplica para outras figuras planas que não apenas quadrados?

(   ) Sim   (   ) Não

6. O que você entendeu a respeito da abordagem do Teorema de Pitágoras com outras figuras diferentes, além dos quadrados?

____

____

____

7. Você já conhecia o *software GeoGebra* ou outro *software* de matemática? Conte-nos um pouco sobre.

8. Compartilhe conosco um pouco da sua experiência e sua relação pessoal com a matemática em sala de aula. Conte-nos se gosta ou se não gosta, o porquê, e o que acha que poderia ser melhorado nas aulas.

9. O que chamou a sua atenção em relação às atividades desta oficina sobre o Teorema de Pitágoras? Sugestões e críticas são bem-vindas.

APÊNDICE B – SLIDES UTILIZADOS NA OFICINA

Explorando o Teorema de Pitágoras e suas extensões.

Apresentação

Olá, meu nome é Pedro Alvaro, tenho 22 anos, sou acadêmico do 8º semestre do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal do Amapá (IFAP) – Campus Macapá.

Irei apresentar para vocês o **Teorema de Pitágoras** de uma forma como vocês nunca viram em uma oficina.

Esta oficina acontecerá no Laboratório de Matemática do IFAP– Campus Macapá e servirá de base para o meu Trabalho de Conclusão de Curso.

Quais são os objetivos com esta oficina?

- ❖Apresentar o Teorema de Pitágoras e suas extensões;
- ❖Divulgar a Generalização do Teorema de Pitágoras;
- ❖Utilizar *softwares* como Geogebra para o ensino de Geometria Plana.

Como funcionará esta oficina?

Esta oficina será dividida em 3 encontros:

1º - Apresentar o Teorema de Pitágoras e resolver problemas que envolvam sua aplicação.

2º - Explicar o que é uma demonstração matemática, demonstrar o Teorema de Pitágoras estender o Teorema de Pitágoras para outras figuras (Triângulos Equiláteros, Hexágonos Regulares e Semicírculos).

3º - Visualizar as extensões do Teorema de Pitágoras no Geogebra e Generalizar o Teorema de Pitágoras para figuras quaisquer.

1º Encontro

Um breve contexto histórico sobre Pitágoras.

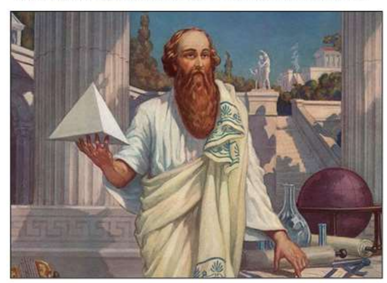
"Pitágoras era um professor e um místico, nascido em Samos, uma das ilhas do Dodecaneso". Boyer (2012, p. 56)

Fez várias viagens pelo Egito, Babilônia e possivelmente indo até a Índia.

Estabeleceu-se em Crotona, na costa Sudeste do que agora é a Itália, mas que era tão chamada Magna Grécia. Lá, ele fundou uma sociedade secreta que se assemelhava um pouco a um culto órfico, exceto por suas bases matemáticas e filosóficas (Boyer 2012, p. 56).

Não se sabe ao certo se o Teorema de Pitágoras foi criado por Pitágoras, pois era comum entre seus discípulos atribuir os créditos de suas descobertas ao seu mestre.

Imagem de Pitágoras rodeado de objetos que representam a matemática, a música e astronomia.

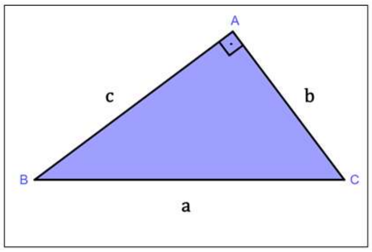


Fonte: www.todamateria.com.br/pitagoras/

O Teorema de Pitágoras

"Em todo triângulo retângulo, a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa."

Triângulo retângulo.



Fonte: Autor.

a é a medida da hipotenusa.

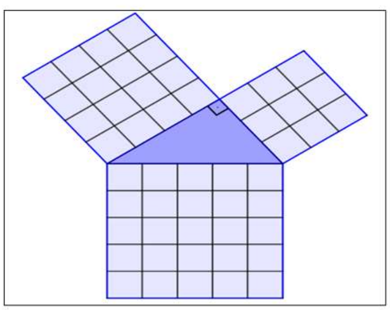
b e **c** são as medidas dos catetos.

Pelo teorema de Pitágoras vale que:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

O Teorema de Pitágoras

Interpretação geométrica do Teorema de Pitágoras.



Fonte: Autor.

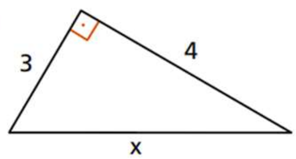
Note que cada quadrado construído sobre os lados do triângulo retângulo está dividido em quadrados menores que servem como uma unidade de área (u.a.).

Assim, considere três quadrados construídos a partir de cada lado do triângulo. Observando esta imagem pode-se notar que a área do quadrado construído a partir da hipotenusa ($25\ u.a.$) é igual à soma das áreas dos outros dois quadrados, construídos a partir dos catetos ($16\ u.a. + 9\ u.a.$)

Alguns problemas

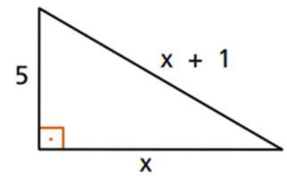
Q.1 - Determine o valor de x nos casos:

a)



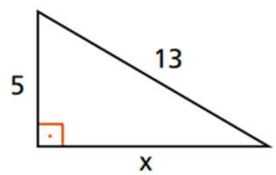
$x = 5$

c)



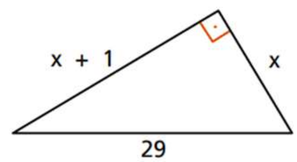
$x = 12$

b)



$x = 12$

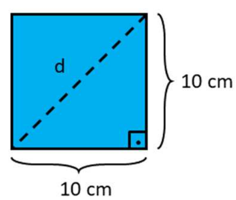
d)



$x = 20$

Alguns problemas

Q.2 - Calcule a medida da diagonal de um quadrado de lado 10cm.



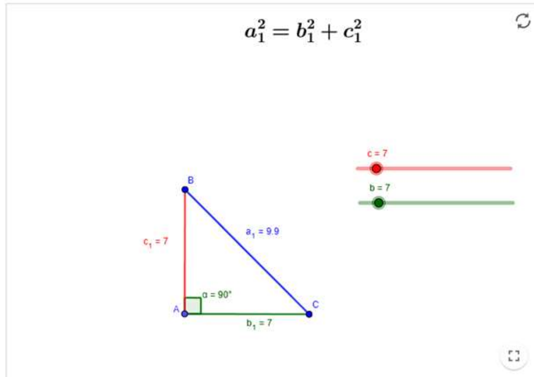
$d = 10\sqrt{2}cm$

Q.3 - Determine a altura de um triângulo equilátero de perímetro 24 m.

$h = 4\sqrt{3}m$

Visualização no Geogebra

Teorema de Pitágoras



Autor: Robson de Oliveira Santos

Link: https://www.geogebra.org/m/vhq9f6xq

2º Encontro

O que é uma demonstração matemática?

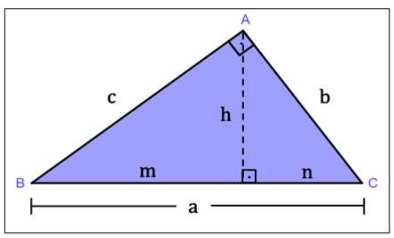
Segundo o Dicionário Online de Português: Demonstrar é fazer com que (alguma coisa) se torne evidente por meio de provas; fazer com que se torne conhecido.

Em matemática segundo Singh (2004, p. 41 apud SILVA, 2020, p. 2):

A ideia da demonstração matemática clássica começa com uma série de axiomas, declarações que julgamos serem verdadeiras ou que são verdades evidentes. Então, através da argumentação lógica, passo a passo, é possível chegar a uma conclusão. Se os axiomas estiverem corretos e a lógica for impecável, então a conclusão será inegável. Esta conclusão é o teorema.

Algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras.

Demonstração utilizando as relações métricas do triângulo retângulo



Fonte: Autor.

Da figura ao lado podemos destacar as seguintes relações métricas:

$$c^2 = a \cdot m$$

$$b^2 = a \cdot n$$

Adicionando essas igualdades membro a membro, temos:

$$c^2 + b^2 = a \cdot m + a \cdot n = a \cdot (m + n) = a \cdot a$$

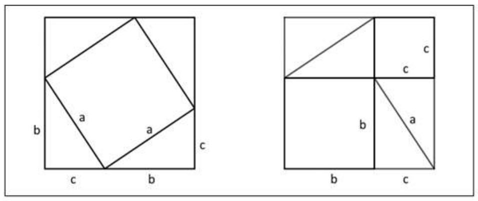
$$c^2 + b^2 = a^2$$

Portanto, em um triângulo retângulo:

$$a^2 = c^2 + b^2$$

Algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras.

Demonstração pela comparação de áreas



Fonte: Autor.

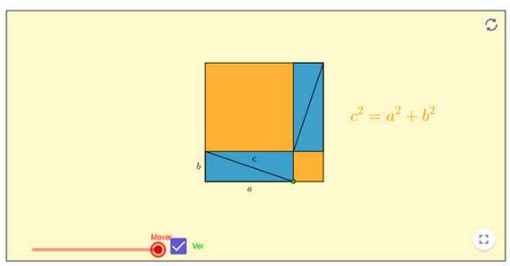
No quadrado à esquerda da figura a seguir que tem $b+c$ como lado, retiremos quatro triângulos retângulos iguais e obtemos um quadrado de lado a. Se fizermos a mesma operação no quadrado à direita (também de lado $b+c$), restarão dois quadrados de lado b e c, isto é $a^2 = b^2 + c^2$.

Visualização no Geogebra

Demonstração I do Teorema de Pitágoras

Autor: Paulo Moreira, Luis Yepes, Vicente Martín Torres López

Tópico: Álgebra



Uma demonstração do Teorema de Pitágoras

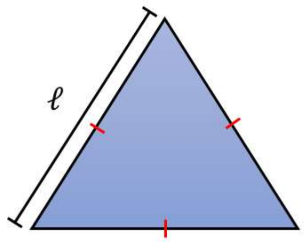
Applet do GeoGebra em que se demonstra geometricamente o Teorema de Pitágoras.

Autores: Paulo Moreira, Luis Yepes Vincente Martín Torres Lopes

Link: https://www.geogebra.org/m/utmyfryp

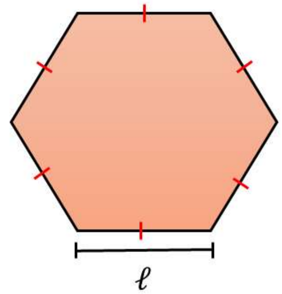
Vamos relembrar o cálculo de áreas de algumas figuras planas.

Triângulo Equilátero



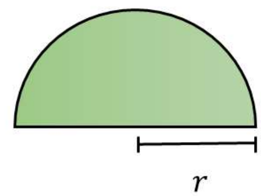
$$A = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

Hexágono Regular



$$A = \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$$

Semicírculo



$$A = \frac{\pi r^2}{8}$$

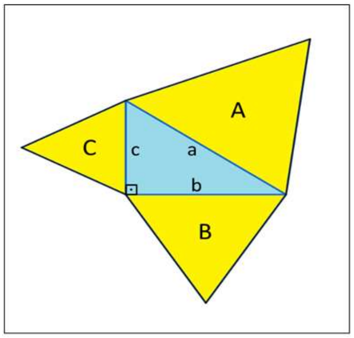
Você sabia que o Teorema de Pitágoras se aplica a outras figuras planas que não são quadrados?

A seguir veremos algumas das extensões do Teorema de Pitágoras.

Extensões do Teorema de Pitágoras

Extensão para triângulos equiláteros.

Triângulos equiláteros construídos sobre os lados do triângulo retângulo.



Fonte: Autor.

Construiremos triângulos equiláteros cujos lados são homólogos com os lados do triângulo retângulo ABC.

Denotaremos por $A, B\ e\ C$ as áreas dos triângulos equiláteros cujos lados são $a, b\ e\ c$, respectivamente. Calculando suas áreas:

$$A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \qquad B = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}, \qquad C = \frac{c^2\sqrt{3}}{4}$$

Somando B e C, obtemos:

$$B + C = \frac{b^2\sqrt{3}}{4} + \frac{c^2\sqrt{3}}{4} = (b^2 + c^2)\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Pelo teorema de Pitágoras é válido que:

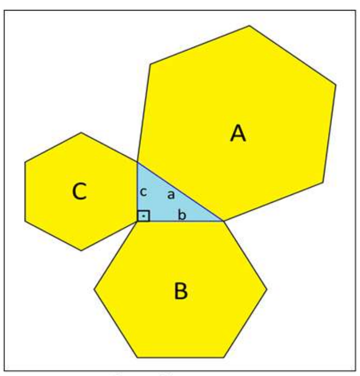
$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$B + C = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \therefore B + C = A.$$

Extensões do Teorema de Pitágoras

Extensão para hexágonos regulares.

Hexágonos regulares construídos sobre os lados do triângulo retângulo.



Fonte: Autor.

Construiremos hexágonos regulares cujos lados são homólogos com os lados do triângulo retângulo ABC.

Denotaremos por $A, B\ e\ C$ as áreas dos hexágonos regulares cujos lados são $a, b\ e\ c$, respectivamente. Calculando suas áreas:

$$A = 3a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad B = 3b^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad C = 3c^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Somando B e C, obtemos:

$$B + C = 3b^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 3c^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}(b^2 + c^2)$$

Pelo teorema de Pitágoras é válido que:

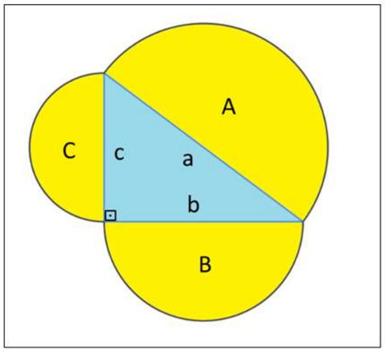
$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$B + C = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 \therefore B + C = A.$$

Extensões do Teorema de Pitágoras

Extensão para semicírculos.

Semicírculos construídos sobre os lados do triângulo retângulo.



Fonte: Autor.

Construiremos semicírculos cujos diâmetros são homólogos com os lados do triângulo retângulo ABC.

Denotando por A a área do semicírculo cujo diâmetro é a, temos que seu raio é $\frac{a}{2}$. De forma análoga faremos com os outros semicírculos. Suas áreas são:

$$A = \frac{a^2\pi}{8}, \qquad B = \frac{b^2\pi}{8}, \qquad C = \frac{c^2\pi}{8}$$

Somando B e C, obtemos:

$$B + C = \frac{b^2\pi}{8} + \frac{c^2\pi}{8} = (b^2 + c^2)\frac{\pi}{8}$$

Pela relação de Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2$

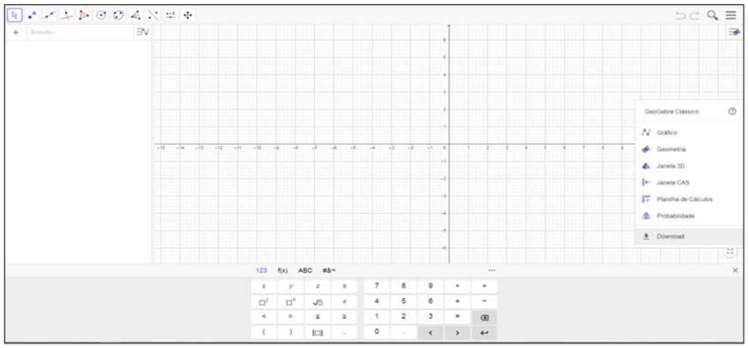
$$B + C = \frac{a^2\pi}{8} \therefore B + C = A$$

3º Encontro

Apresentação do Geogebra

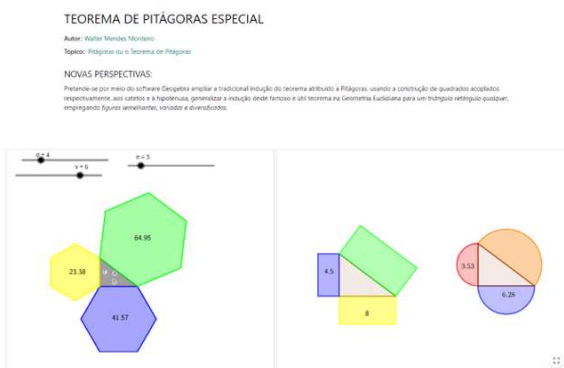
Criado por Markus Hohen Warter em 2001, o software Geogebra apresenta inúmeras potencialidades para as aulas de Matemática, sendo classificado como um software de geometria dinâmica.

Figura 11 - Janela do GeoGebra.



Fonte: Autor.

Visualização no Geogebra

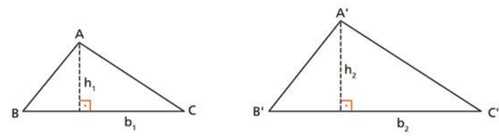


Autor: Walter Mendes Monteiro

Link: https://www.geogebra.org/m/hffcycf3

Razão entre áreas

Razão entre áreas de dois triângulos semelhantes



Área do triângulo ABC = S_1 Área do triângulo A'B'C' = S_2

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Rightarrow \frac{b_1}{b_2} = \frac{h_1}{h_2} = k \text{ (razão de semelhança)}$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}b_1h_1}{\frac{1}{2}b_2h_2} = \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{h_1}{h_2} = k \cdot k = k^2 \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = k^2$$

Conclusão: A razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

Razão entre áreas

A propriedade anterior se estende para a razão entre as áreas de dois polígonos quaisquer semelhantes.

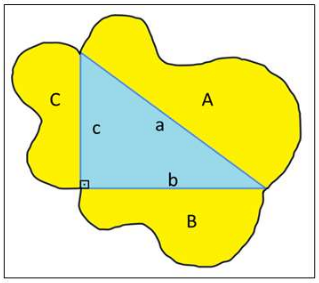
Porém não iremos demonstrar tal propriedade pois não é o foco desta oficina apenas utilizaremos ela para demonstrar a Generalização do Teorema de Pitágoras.

Conclusão: A razão entre as áreas de dois polígonos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

GENERALIZANDO O TEOREMA DE PITÁGORAS

Extensão para figuras gerais.

Figura auxiliar para generalização.



Fonte: Autor.

Sabendo que a razão entre as áreas de figuras semelhantes é o quadrado da razão de semelhança.

Note que:

$$\frac{B}{A} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \Rightarrow \frac{B}{b^2} = \frac{A}{a^2}$$

$$\frac{C}{A} = \left(\frac{c}{a}\right)^2 \Rightarrow \frac{C}{c^2} = \frac{A}{a^2}$$

Das equações acima podemos inferir que:

$$\frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2} = \frac{C}{c^2}$$

Utilizando as propriedades de proporção podemos criar uma nova fração equivalente;

$$\frac{A}{a^2} = \frac{B + C}{b^2 + c^2}$$

Daí:

$$a^2 = b^2 + c^2 \implies A = B + C$$

Referências

BOYER, Carl Benjamin; MERZBACH, Uta Caecilia. **História da Matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012. 504 p. Tradução da 3.ª edição americana.

DEMONSTRAR: Significado de Demonstrar. **Significado de Demonstrar**. 2023. Disponível em: https://www.dicio.com.br/demonstrar/. Acesso em: 05 abr. 2023.

SILVA, Paulo Henrique das Chagas; SILVA, Anderson Jefty Rodrigues; COSTA, Jeovano Pereira da; SOUSA, Levi Rodrigo Pinto de. **PROVAR PRA QUÊ? CONCEPÇÕES SOBRE A DEMONSTRAÇÃO MATEMÁTICA**. In: VII CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, 7., 2020, Maceió - Al. Anais [...]. Maceió - Al: Conedu, 2020. p. 1-12.

APÊNDICE C – TERMO DE ACEITE

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE)

Olá, eu sou o Pedro Alvaro Lopes dos Reis Filho, acadêmico do 8º semestre de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amapá (IFAP) – Campus Macapá e por meio deste termo de compromisso você está sendo convidado(a) como voluntário(a) a participar da aplicação da oficina: Explorando o Teorema de Pitágoras e suas extensões. Esta oficina será a base de pesquisa do meu Trabalho de Conclusão de Curso cujos objetivos são apresentar o Teorema de Pitágoras e suas extensões, utilizar *softwares* como *Geogebra* para o ensino de Geometria Plana e divulgar a Generalização do Teorema de Pitágoras.

Esta oficina ocorrerá no Laboratório de Matemática do IFAP – Campus Macapá. Serão três dias de aplicação sendo estes nos dias 20,26 e 28 de abril de 2023 pelo período da tarde de 15:00h até 17:00h. Durante esses dias serão dadas aulas abordando as temáticas propostas e um questionário ao final.

Estou ciente de que a minha privacidade será respeitada, ou seja, meu nome ou qualquer dado ou elemento que possa, de qualquer forma, me identificar será mantido em sigilo. É assegurada a assistência durante toda a pesquisa, bem como me é garantido o livre acesso a todas as informações e esclarecimentos adicionais sobre o estudo e suas consequências, enfim, tudo que eu queira saber antes, durante e depois da minha participação. Declaro que fui informado(a) de que posso me recusar a participar do estudo, ou retirar meu consentimento a qualquer momento, sem precisar justificar, e se desejar sair da pesquisa não sofrerei qualquer prejuízo.

Pesquisador Responsável: Pedro Alvaro Lopes dos Reis Filho.
Telefone para contato: (96) 99194 – 8306.
E-mail para contato: nemesis404.pf@gmail.com.

Declaro que li e entendi todas as informações presentes neste Termo e tive a oportunidade de discutir as informações nele contidas. Todas as minhas perguntas foram respondidas e estou satisfeito(a) com as respostas. Enfim, tendo sido orientado(a) quanto ao teor de todo o aqui mencionado e compreendido a natureza e o objetivo do já referido estudo, eu manifesto meu livre consentimento em participar, estando totalmente ciente de que não há nenhum valor econômico, a receber ou pagar, por minha participação.

____
Assinatura do aluno

____
Assinatura do responsável