INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO AMAPÁ
IFAP
CAMPUS MACAPÁ
CURSO SUPERIOR DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

EDIVALDO BASTOS DA SILVA
JOSÉ WLADEMIR BARROS RAMOS

CÁLCULO DIFERENCIAL INTEGRAL: Aplicações na educação básica

MACAPÁ-AP
2020

EDIVALDO BASTOS DA SILVA
JOSÉ WLADEMIR BARROS RAMOS

CÁLCULO DIFERENCIAL INTEGRAL: Aplicações na educação básica

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado ao Curso Superior de Licenciatura em Matemática, do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amapá – IFAP, como requisito avaliativo para obtenção de título de Licenciado em Matemática.
Orientador: Me. André Luiz dos Santos Ferreira.
Coorientador: Dr. Carlos Alexandre Santana Oliveira

MACAPÁ-AP
2020

Biblioteca Institucional - IFAP
Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

S586c Silva, Edivaldo Bastos da
Cálculo Diferencial Integral: aplicações na educação básica / Edivaldo Bastos da Silva, José Wlademir Barros Ramos. - Macapá, 2020.
46 f.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) -- Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amapá, Campus Macapá, Curso de Licenciatura em Matemática, 2020.

Orientador: Me. André Luiz dos Santos Ferreira.
Coorientador: Dr. Carlos Alexandre Santana Oliveira.

1. Limites. 2. Derivadas. 3. Integral. I. Ramos, José Wlademir Barros. I. Ferreira, Me. André Luiz dos Santos, orient. II. Oliveira, Dr. Carlos Alexandre Santana, coorient. III. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica do IFAP com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

EDIVALDO BASTOS DA SILVA

JOSÉ WLADEMIR BARROS RAMOS

CÁLCULO DIFERENCIAL INTEGRAL: Aplicações na educação básica

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado ao Curso Superior de Licenciatura em Matemática, do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amapá - IFAP, como requisito avaliativo para obtenção de título de Licenciado em Matemática.
Orientador: Me. André Luiz dos Santos Ferreira.
Coorientador: Dr. Carlos Alexandre Santana de Oliveira.

Aprovado em: 09/12/2020.

BANCA EXAMINADORA

André Luiz dos Santos Ferreira

Prof. Me. André Luiz dos Santos Ferreira – Orientador.

Prof. Dr. Carlos Alexandre Santana Oliveira – Coorientador.

Ronaldo Franck Figueiredo L.A.

Prof. Me. Ronaldo Franck Figueiredo Leite– Avaliador

Daniela Lima

Prof. Ma. Elma Daniela Bezerra Lima – Avaliadora

Aos meus filhos Rômulo Dalton Bastos da Silva e Thomas Tarso de Sousa Silva, que são a minha razão de viver.

À minha esposa Mônica Lopes de Sousa Silva, pelo companheirismo e incentivo ao longo dessa caminhada.

Edivaldo Bastos da Silva

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por me transmitir força, coragem e fé ao longo desses anos e que sempre me fez persistir;

Aos meus pais EMILIO LOBO DA SILVA e NATALINA DE JESUS BASTOS DA SILVA que são meus maiores exemplos de vida;

Sou grato pela educação e pelo incentivo dado ao longo dessa jornada;

Ao professor e orientador Me. ANDRÉ LUIZ DOS SANTOS FERREIRA pelo incentivo, amizade, confiança e dedicação em me ensinar o caminho a ser percorrido ao longo do curso;

Ao professor e orientador Dr. CARLOS ALEXANDRE SANTANA OLIVEIRA por sua amizade, dedicação e compromisso na orientação deste TCC;

Ao amigo SALOMÃO LIMA MONTEIRO grande parceiro de estudos e trabalhos acadêmicos;

A amiga LARISSA MASCARENHAS COELHO pela parceira em trabalhos acadêmicos;

Aos colegas do curso de Licenciatura em matemática pela amizade e pela troca de conhecimentos durante o curso;

Aos professores do curso de Licenciatura em Matemática do IFAP que foram de grande importância e contribuíram para o nosso processo de formação profissional.

Edivaldo Bastos da Silva

Aos meus pais José Raimundo Silva Ramos e Maria Barros Ramos que são meus maiores exemplos de vida.

José Wlademir Barros Ramos

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela minha vida, e por me permitir ultrapassar todos os obstáculos encontrados ao longo da realização deste trabalho;

À minha esposa Conceição Nunes de Araújo Ramos que sempre esteve ao meu lado, incentivando e, mesmo nas dificuldades durante a gravidez me deu forças para não desistir e assim pudesse encarar as dificuldades encontradas pelo caminho ao longo do curso;

Aos meus filhos Maria Vitória de Araújo Ramos e José Isaque de Araújo Ramos, razão para que eu possa estudar e lutar pelos meus objetivos;

Ao grande orientador e Professor Me. André Luiz dos Santos Ferreira que sempre acreditou nessa minha conquista e que sempre me ajudou nas horas em que eu mais precisei, sempre foi e será mais que um amigo;

Ao professor e orientador Dr. Carlos Alexandre Santana Oliveira que nessa jornada de estudos sempre foi paciente e teve total dedicação para que pudéssemos concluir este trabalho;

Aos colegas do curso de Licenciatura em matemática pela amizade e pela troca de conhecimentos durante o curso;

Aos professores do curso de Licenciatura em Matemática do IFAP que foram de grande importância e contribuíram para o nosso processo de formação profissional.

José Wlademir Barros Ramos

RESUMO

Esta pesquisa buscou evidenciar de forma sucinta algumas possíveis aplicações do Cálculo Diferencial e Integral na Educação Básica. Tendo como tema gerador a demonstração de alternativas de introduzir o estudo de Cálculo na Educação Básica, sem que haja comprometimento no aprendizado do aluno e aumento da carga horária docente. A revisão de literatura envolveu tanto a Indução ao Cálculo, como a abordagem do Cálculo nos livros didáticos. A metodologia baseou-se em um levantamento teórico de alguns livros e artigos científicos, referente ao tema da proposta, utilizando para isso recursos existentes na biblioteca do Instituto Federal do Amapá - Campus Macapá, bem como nos periódicos, livros de seu acervo e através de acesso a fontes disponibilizadas na internet. Desse modo, foi apresentado de forma didática as aplicações do Cálculo nas disciplinas de Matemática, Física, Biologia, Química, entre outros, com a finalidade de demonstrar e apresentar essas ferramentas matemáticas de forma compreensível e acessível aos alunos e professores, enfatizando que não é uma tarefa simples para o professor de matemática, porém é possível despertar o interesse pelo cálculo ao se trabalhar questões que estejam relacionada à vivência dos alunos. No mais, o trabalho buscou não só contribuir como também enriquecer os indicadores de pesquisas na área do Cálculo para Educação Básica, mostrando diferentes sugestões sobre o tema.

Palavras-chave: Ensino Médio. Matemática Aplicada. Cálculo Diferencial Integral.

ABSTRACT

This research sought to briefly show some possible applications of Differential and Integral Calculus in Basic Education. Having as generator theme the demonstration of alternatives to introduce the study of Calculus in Basic Education, without compromising the student's learning and increasing the teaching load. The literature review involved both Induction to Calculus and the approach to Calculus in textbooks. The methodology was based on a theoretical survey of some books and scientific articles, related to the proposal's theme, using existing resources in the library of the Federal Institute of Amapá - Campus Macapá, as well as in periodicals, books from its collection and through access to sources available on the internet. Thus, the applications of Calculus in the disciplines of Mathematics, Physics, Biology, Chemistry, among others, were presented in a didactic way, with the purpose of demonstrating and presenting these mathematical tools in an understandable and accessible way to students and teachers, emphasizing that it is not a simple task for the math teacher, but it is possible to arouse interest in calculus when working on issues that are related to the students' experience. In addition, the work sought not only to contribute but also to enrich the research indicators in the area of Calculation for Basic Education, showing different suggestions on the theme.

Keywords: Basic Education. AplicatedMath. Differentialand Integral Calculus.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

No Brasil, os conteúdos de cada componente ofertada no ensino médio constam na Base Nacional Comum Curricular – BNCC. Esse documento é elaborado pelo Ministério da Educação – MEC, contempla os conteúdos mínimos necessários na formação dos estudantes das escolas públicas e privadas e tem por objetivo estabelecer um patamar de aprendizagem em todo país. O documento relata que:

> Ao longo da Educação Básica (na Educação Infantil, no Ensino Fundamental e no Ensino Médio) os alunos devem desenvolver as dez Competências da Educação Básica que pretendem assegurar, como resultado do seu processo de aprendizagem e desenvolvimento, uma formação humana integral que visa à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva (BNCC, 2017, p.25).

Em se tratando na componente curricular matemática, acredita-se que é possível acrescentar novos conteúdos à BNCC sem que haja comprometimento do aprendizado do aluno e aumento da carga horária docente. Os novos conteúdos contemplariam o cálculo diferencial e, embora não conste na BNCC, se correlaciona com ensino de funções, presente no ensino médio.

O ensino de funções é imprescindível, pois está presente em processos básicos seja na matemática, física, biologia entre outras disciplinas.

> Muitas situações do cotidiano – por exemplo, a distância percorrida por um carro em função do tempo, explorada na área da Física, ou o crescimento do número de bactérias em função do tempo, na área da Biologia – podem ser analisadas como relações entre grandezas, denominadas funções, que são definidas por leis matemáticas. (SANTANA, 2011, p.25).

O cálculo diferencial possui várias aplicações que podem ser utilizadas na resolução de problemas. Uma das aplicações, por exemplo, consiste em calcular o ponto de máximo ou mínimo da função quadrática, usando para isso a derivada da função. Sabe-se que inserir o cálculo diferencial no ensino médio não é uma tarefa fácil, mas os auxílios proporcionados na compreensão do estudo de funções merecem a nossa atenção.

O autor Santos (2012, p. 11) expõe que ao longo dos anos:

> O cálculo vem desempenhando um papel de extrema importância no desenvolvimento cientifico-tecnológico. Os conceitos de Cálculo são utilizados em muitas áreas de pesquisas no campo das ciências exatas. Essa importância fica

> evidente nas pesquisas realizadas nas áreas da Biologia, Economia e Física (SANTOS, 2012, p. 11).

Com o ensino do Cálculo podem ser estabelecidas relações com outros conteúdos de Matemática. Como no caso o ensino de Geometria, podemos deduzir a fórmula da área de um círculo usando noções de limites. Na Geometria Analítica podemos analisar pontos críticos e pontos de inflexão, importantes para a descrição de uma curva (SANTOS, 2012, p. 11). Decorrente a isso, os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN’s (1997, p.38) enfatizam que:

> O desafio que se apresenta é de identificar, dentro de cada um desses vastos campos, de um lado, quais conhecimentos, competências, hábitos e valores são socialmente relevantes; de outro, em que medida contribuem para o desenvolvimento intelectual do aluno, ou seja, na construção e coordenação do pensamento lógico-matemático, da criatividade, da intuição, da capacidade de análise e de criação, que constituem esquemas lógicos de referência para interpretar fatos e fenômenos (PCN’s, 1997, p.38).

Dessa forma, ao determinar conceitos e procedimentos a serem estudados em sala de aula, a seleção de conteúdo poderia ser realizada em uma perspectiva mais ampla, o que sem dúvida, proporcionaria uma riqueza de conhecimentos para o processo de ensino.

Trabalhar o Cálculo na Educação básica é fundamental pois trata-se de uma área da matemática desenvolvida por meio da Álgebra e da Geometria, no qual abrange os estudos de taxa de variação, que trabalha a inclinação da reta e acúmulo de quantidades que se aplica ao estudo de área e volume de um sólido. O que oferece um universo de possibilidades de aplicação interdisciplinar. Em consonância a isso, o ensino do cálculo no ensino médio é uma questão que vem sendo levantada por alguns pesquisadores, devido à importância para as ciências e tecnologias modernas (FLORET, 2014, p.17).

Desse modo, o trabalho foi elaborado com o objetivo de apresentar, de forma sucinta, algumas possíveis aplicações do cálculo diferencial à problemas de nível médio. Além de desenvolver alguns conceitos de limites, derivada, integral baseados nos estudos de funções com a finalidade de demonstrar as possibilidades de apresentar essas ferramentas matemáticas de forma compreensível e acessível para os estudantes do ensino médio.

O trabalho buscou englobar tanto a abordagem do Cálculo nos livros didáticos, como a Introdução ao Cálculo para assim propor as possíveis aplicações. A metodologia fundamentou-se em levantamento teórico, referente ao tema proposto, utilizando para isso recursos existentes na biblioteca do Instituto Federal do Amapá - *Campus* Macapá, seja nos periódicos e livros de seu acervo e através de acesso a fontes disponibilizadas na internet.

As considerações finais foram pautadas de acordo com a explanação das discussões na qual se percebeu que no ensino médio ‘’tradicional’’ é comum o ensino da Matemática de forma um tanto quanto não convencional, no sentido de não serem abordados conteúdos de cálculo diferencial, assunto esse que poderia ser cobrado no ensino médio, por haverem aplicações diversas no cotidiano dos estudantes.

Portanto, esse trabalho buscou contribuir com o acervo de pesquisas realizadas no ramo do Cálculo para Educação Básica, de forma a exibir diferentes propostas acerca do tema.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo serão tratados os conceitos de limites, derivada e integral, com intuito de colaborar com embasamento teórico do trabalho. Esses conceitos são de grande relevância e se relacionam com o conteúdo funções estudadas no ensino médio.

2.1 Uma abordagem sobre cálculo no ensino básico

Nas experiências obtidas como estudantes do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Ciência e Tecnologia do Amapá – IFAP e na ocasião cursando a disciplina de Cálculo Diferencial Integral, pudemos perceber as dificuldades que os colegas de classe apresentavam com a disciplina, o que nos despertou interesse em aprofundar estudos aos quais julgamos necessário mostrar a importância de o cálculo diferencial ser apresentado aos alunos no ensino médio.

O ensino da Matemática no Brasil nas décadas de 60 e 70, e em outros países foi influenciado pelo movimento da Matemática Moderna e, como consequência, houve a exclusão de alguns conteúdos dos antigos programas, dentre eles o Cálculo. Atualmente, os temas como Limite, Derivada e Integral não são ensinados no Ensino Médio e não aparecem em alguns livros didáticos tendo como justificativa serem difíceis e impróprios a esse segmento da educação, devendo ficar restrito apenas ao Ensino Superior. (MARIA, 2013, p.19).

E ao se analisar a história do desenvolvimento do Cálculo no Brasil, foi possível perceber que, devido a algumas reformas no ensino, o conteúdo de Cálculo já esteve presente na matriz curricular do ensino médio da qual foi retirado devido às inúmeras reformas curriculares. Atualmente, é possível perceber que alguns tópicos do Cálculo se encontram ausentes nos livros didáticos, como os limites e as derivadas (LADISLAU, 2014, p.16).

E de acordo com Maria (2013, p.12-13), o Cálculo Diferencial e Integral é:

> Uma das disciplinas mais tradicionais do Ensino Superior de Ciências Exatas e, também, base referencial para a compreensão do desenvolvimento científico e tecnológico, desde que foi proposto por Newton e Leibniz, há trezentos anos. Entretanto, apesar de sua importância e atualidade como conhecimento humano, o ensino do cálculo ainda preserva a sua estrutura original, sendo considerada uma das disciplinas que apresenta as maiores dificuldades de aprendizado, por parte dos alunos e até mesmo professores. (MARIA, 2013, p. 12 – 13).

Por esse motivo introduzir o cálculo diferencial ao ensino médio, pode possibilitar um amplo conhecimento da matéria, tendo em vista que o seu conteúdo é bastante extenso. Para Aguiar (2019, p.12), "O cálculo diferencial não está previsto no programa atual do ensino médio, apesar de alguns anos atrás estar presente em alguns livros deste nível". E optar pela inclusão do cálculo diferencial no ensino médio, pode facilitar o aprendizado ao longo do tempo, implicando resultados mais positivos na formação do aluno de matemática. O Cálculo Diferencial e Integral é uma fonte de inspiração criativa e crítica, uma vez que atualiza a compreensão do fenômeno científico contribuindo, de maneira expressiva, para o resgate do conhecimento no campo da matemática e suas ramificações. (MARIA, 2013, p.16).

Segundo Pascoal (2014, p.13), "os conceitos de cálculo, quando presentes nos livros didáticos, são abordados de maneira simples e muito tarde, geralmente através de definições, exemplos e exercícios propostos". O autor enfatiza que:

> Os livros didáticos levam muito tempo explicando conceitos sobre funções, muitas vezes de forma excessivamente complicada, alguns desses conceitos poderiam ser abordados usando o Cálculo, podendo tornar a aprendizagem mais simples já que o mesmo método poderia ser usado com vários tipos de funções (PASCOAL, 2014, p.14).

Conforme Maria (2013, p. 20), "A noção do Cálculo Diferencial e Integral é uma ferramenta necessária para compreensão da Física, Química, Biologia e na própria Matemática, presentes no Ensino Médio e a falta deste tópico neste nível de ensino torna para o aluno as ciências mais difíceis do que realmente parece ser". Com isso se torna bastante evidente que o estudo de cálculo diferencial no ensino médio tonar-se-ia de grande valia para o desenvolvimento do aprendizado dos alunos.

Na visão de Pascoal (2014, p.19), o Cálculo como qualquer outra matéria:

> Foi o resultado de muitos anos de desenvolvimento. As primeiras ideias para o uso do cálculo foram sobre o que hoje nos cursos universitários chamamos de integral, seguindo o caminho contrário do que é ensinado nesses mesmos cursos, pois eles começam introduzindo o uso do conceito de derivadas e após desenvolver toda essa parte, utiliza à integral. (PASCOAL, 2014, p.19)

E para que o aluno do Ensino Médio se sinta familiarizado com as ideias do Cálculo Diferencial e Integral, no Ensino Superior, se faz necessário, que os mesmos tenham contato com essas noções no decorrer de uma formação básica de uma forma agregada aos demais conteúdos, para evitar um cenário insatisfatório para aluno, professor e sociedade que vemos na atualidade. (MARIA, 2013, p.20). O autor Ribeiro (2016, p.14), comenta que:

> Na educação, a matemática, nos dias atuais, requer uma redefinição nos planos curriculares e métodos de ensino-aprendizagem que ofereçam capacidade de reflexão crítico e autônomo. O Cálculo Diferencial e Integral é uma das colunas da expansão tecnológica, tendo uma grande tradição no ensino acadêmico - ciências exatas (RIBEIRO, 2016, p.14).

Através do estudo do cálculo diferencial no ensino médio, mesmo que, sendo de forma simplificada a aplicação de conceitos básicos, com aplicações nos estudos de funções, poderá servir de embasamento para que o aluno quando ingressar no ensino superior não sinta tantas dificuldades em relação aos seus estudos.

O desenvolvimento do cálculo diferencial, com certeza é um dos grandes pontos de virada do relato histórico da matemática. O cálculo resolvia problemas que tinham preocupado os matemáticos por dois mil anos e abriu as portas para problemas que ninguém sabia que existiam. (RIBEIRO, 2016, p.16). Como é descrito por Junior (2015, p.1), que diz:

> Atualmente muitos pesquisadores da área de educação estudam possibilidades para que o Cálculo Diferencial e Integral seja inserido no currículo do ensino médio, com o objetivo de mostrar a importância da matemática como uma ciência que faz parte no nosso cotidiano e deixe de ser vista como algo difícil e desconexa com outras áreas. (JUNIOR, 2015, p.1)

Salientando assim, que inserção do Cálculo no ensino Básico torna-se de certa forma essencial visto que o conteúdo agrega inúmeras possibilidades de aplicação, seja na matemática, seja nas disciplinas de exatas como ferramenta interdisciplinar.

Baseados nesses estudos nosso trabalho visa mostrar e defender a importância do estudo de cálculo diferencial, acreditamos que está disciplina sendo inserida no currículo do ensino médio, possa facilitar o aprendizado do aluno em sua formação superior.

2.2 Limites

A fundamentação teórica de grande parte do cálculo foi desenvolvida utilizando como ponto de partida o limite de uma função. Citando como exemplo, as definições de derivada e de integral definida, independente do seu significado geométrico ou físico, são estabelecidas usando a noção de limites de uma função (APOSTOL, 1967, p.513-515).

De acordo com autor Apostol (1967, p.513-515), o ponto de partida para o desenvolvimento intuitivo de limite, será estudando o comportamento de uma função y = f(x) nas proximidades de um ponto que não pertence, necessariamente, ao seu domínio. Considere a seguinte função (2.1) como exemplo:

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} \qquad 2.1$$

É claro que Dom(f)=$\Re$– {1}. Estudaremos a função nos valores de x que ficam próximos de 1, mas sem atingir 1. Para todo x ∈ Dom(f)temos que f(x) = 2x + 1, após simplificação.

Vamos construir uma tabela de valores aproximando-se de 1, pela esquerda ($x < 1$) e pela direita ($x > 1$) e os correspondentes valores de $f(x)$:

Tabela 1 – Comportamento da função nas proximidades do ponto x = 1.

$x < 1$	$f(x)$	$x > 1$	$f(x)$
0	1	2	5
0,5	2	1,7	4,4
0,7	2,4	1,5	4
0,8	2,6	1,2	3,4
0,9	2,8	1,09	3,18
0,99	2,98	1,009	3,018
0,999	2,998	1,0009	3,0018
0,9999	2,9998	1,00009	3,00018
0,99999	2,99998	1,000009	3,000018
0,999999	2,999998	1,0000009	3,0000018
0,9999999	2,9999998	1,00000009	3,00000018

Fonte: Dos autores, (2020).

Agora vejamos algumas observações referente a tabela1:

I. Observando a tabela, podemos verificar que: “à medida que x vai se aproximando de 1, os valores de $f(x)$ vão aproximando-se de 3”.

II. A noção de proximidade pode ficar mais precisa utilizando valor absoluto. De fato, a distância entre dois pontos quaisquer $x, y \in \Re$ é $|y - x|$. Assim a frase anterior escrita entre aspas, pode ser expressa por: se $|x - 1|$aproxima-se de zero, então $|f(x) - 3|$também se aproxima de zero; em outras palavras: para que $|f(x) - 3|$ seja pequeno é necessário que $|x - 1|$ também seja pequeno.

III. O número 3 é chamado limite de $f(x)$ quando x está próximo de 1. No exemplo, temos $|f(x) - 3| = 2|x - 1|$; logo, a distância de $f(x)$ a 3 é igual a duas vezes a distância de x a 1. É claro que quando x aproxima-se de $1, |x - 1|$ aproxima-se de zero e consequentemente $|f(x) - 3|$ também se aproxima de zero.

IV. Mais ainda, poderemos tornar $f(x)$ tão perto de 3 quanto desejarmos, bastando para tal considerar x suficientemente próximo de 1. Por exemplo, se desejarmos que $|f(x) - 3|$ seja igual a 0.2, basta considerar $|x - 1| = 1.0$; agora, se desejarmos que $|f(x) - 3| < 0.02$, basta considerar $|x - 1| < 0.01$.

V. De um modo geral, considerando qualquer número real positivo ε, tão pequeno quanto se deseje e definindo o número real $\delta = \varepsilon/2$, teremos que a distância de $f(x)$ a 3 é menor que ε, desde que a distância de x a 1 seja menor que δ. Então para todo número real positivo ε existe outro número real positivo δ, que depende de ε, tal que se $0 < |x - 1| < \delta$, então $|f(x) - 1| = 2|x - 1| < 2\delta = \varepsilon$.

A seguir temos a seguinte definição formal de limite (APOSTOL, 1967):

Definição 2.2.1: sejam $f: A \to \mathfrak{R}$ uma função e $b \in \mathfrak{R}$ tais que para todo intervalo aberto I contendo a, tem-se $I \cap (A - \{a\}) \neq \phi$. O número real L é o limite de $f(x)$ quando x aproxima-se de a quando para todo número $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ (δ dependendo de ε), tal que, se $x \in A$ e $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$. A notação é:

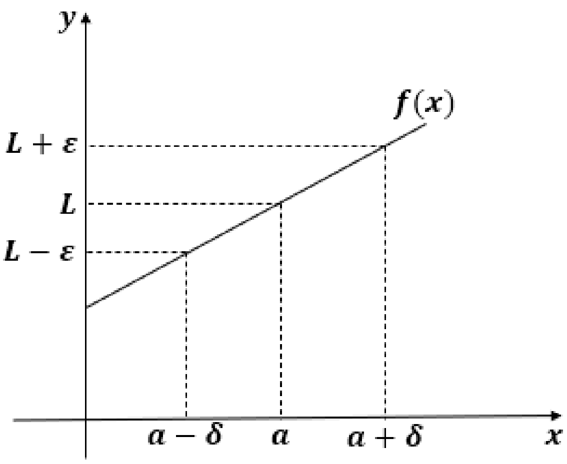
$$\lim_{x \to a} f(x) = L \qquad 2.2$$

Da definição 2.2.1 recorre a seguinte observação:

Observação 2.2.1: A definição é equivalente a dizer: Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in (a - \delta, a + \delta) \cap (A - \{a\})$, então $f(x) = (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

Graficamente a definição de limite pode ser constatada na figura 1. A figura 1 mostra que a distância entre os valores na proximidade do ponto a tem valor δ e a distância entre o valor de $f(x)$ e o limite L tem valor ε.

Figura 1 – Limite da função f(x) nas proximidades do ponto x = a.



Fonte: Dos autores, (2020).

2.2.1 Propriedades do Limite

De acordo com os autores MUNEN &FOULIS (1978, p 57 - 58), podemos definir as propriedades de limites, considerando as funções $f(x)$ e $g(x)$, definidas em certo domínio D, tais que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} F(x) = M$

- Regra da constante: O limite de uma constante é a própria constante, onde K é uma constante;

$$\lim_{x \to a} K = K \qquad 2.3$$

- Regra da soma: O limite da soma de duas funções é igual a soma dos respectivos limites;

$$\lim_{x \to a}[f(x) + g(x)] \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = L + M \qquad 2.4$$

- Regra da diferença: O limite da diferença de duas funções é igual a diferença dos respectivos limites;

$$\lim_{x \to a}[f(x) - g(x)] \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) = L - M \qquad 2.5$$

- Regra da constante: O Limite do produto de uma constante por uma função é igual a constante vezes o limite da função.

$$\lim_{x \to a}[K \cdot f(x)] = K \cdot L. \qquad 2.6$$

- Regra do produto: O Limite do produto é o produto dos limites.

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = L\cdot M = \lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x). \quad 2.7$$

- Regra do quociente: O Limite do quociente é o quociente dos limites, desde que o limite do denominador seja diferente de zero.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L}{M}, com\ M\ \neq 0 \quad 2.8$$

- Regra do módulo: O Limite do módulo é o módulo do limite.

$$\lim_{x\to a}|f(x)| = |L|. \quad 2.9$$

- Regra da potência: O limite de uma potência enésima de uma função é igual à potência enésima do limite.

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n = L^n, n \in aos\ números\ naturais. \quad 2.10$$

- Regra da raiz: O limite da raiz enésima de uma função é igual a raiz enésima do limite dessa função.

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}, n \in \text{aos números naturais} \quad 2.11$$

Essas são as principais propriedades dos limites, com a possibilidade de diversas aplicações que serão demonstradas em problemas no capítulo 5 deste trabalho.

2.3 Derivada

O conceito de derivada está intimamente relacionado à taxa de variação instantânea de uma função, o qual está presente no cotidiano das pessoas, através, por exemplo, da determinação da taxa de crescimento de uma certa população, da taxa de crescimento econômico do país, da taxa de redução da mortalidade infantil, da taxa de variação de temperaturas, da velocidade de corpos ou objetos em movimento, enfim, poderíamos ilustrar inúmeros exemplos que apresentam uma função variando e que a medida desta variação se faz necessária em um determinado momento.

Para entendermos como isso se dá, inicialmente vejamos a definição matemática da derivada de uma função em um ponto (STEWART, 2013, p, 80-100):

Definição 2.3: Se uma função f é definida em um intervalo aberto contendo x_0,então a derivada de f em x_0, denotada por $f'(x_0)$ é dada por:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad 2.12$$

Se este limite existir. Δx representa uma pequena variação em x próximo de x_0, ou seja, tomando $x = x_0 + \Delta x \Delta x = x - x_0$, a derivada de f em x_0 pode também se expressa por:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad 2.13$$

2.3.1 Propriedades da Derivada

Segundo POFFAL (2016, p. 24 – 38). A derivada envolve a variação ou mudança no comportamento de vários fenômenos. Para melhor entender o conceito de derivada, iremos abordar três problemas que envolvem variação e movimento.

1) O problema da reta tangente: seja $f: D(f) \subset \Re \rightarrow \Re$ uma função real e $x_0 \in D(f)$ como obter a equação da reta tangente ao gráfico de f que passa pelo ponto $(x_0, f(x_0))$?

2) O problema da velocidade e da aceleração: seja $s: D(s) \subset \Re \rightarrow \Re$ uma função real que descreve o deslocamento de um objeto no plano e $t_0 \in D(s)$, como determinar a velocidade e a aceleração do objeto em $t = t_0$?

3) O problema de máximos e mínimos: seja $f: D(f) \subset \Re \rightarrow \Re$ uma função real qualquer. Como encontrar os pontos extremos do gráfico de f ?

Com essas informações em ‘’mãos’’, o passo seguinte é definir as principais propriedades fundamentais da derivada:

- Regra da constante: Se K for uma constante e se $f(x) = K$ para todo x, então $f'(x) = 0$

$$\frac{d}{dx}(K) = 0 \qquad 2.14$$

- Regra da potência: Se n for um inteiro positivo e se $f(x) = x^n$, então $f'(x) = nx^{n-1}$.

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{(n-1)}. \qquad 2.15$$

- Regra da homogeneidade: Se f é derivável e K é uma constante, então $K \cdot f$ é derivável e $(K \cdot f)' = K \cdot f'$.

$$\frac{d}{dx}(K \cdot f) = K \cdot \frac{df}{dx}. \qquad 2.16$$

- Regra da soma: Se f e g são deriváveis, então $f + g$ é derivável e $(f + g)' = f' + g'$.

$$\frac{d}{dx}(f + g)' = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}. \qquad 2.17$$

- Regra da diferença: De forma semelhante a regra da soma, se f e g são deriváveis, então $(f - g)'$ é derivável e $(f - g)' = f' - g'$.

$$\frac{d}{dx}(f - g)' = \frac{df}{dx} - \frac{dg}{dx}. \qquad 2.18$$

- Regra do produto: Se f e g são deriváveis, então $f \cdot g$ é derivável e $(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f$.

$$\frac{d}{dx}(f \cdot g) = \frac{df}{dx} \cdot g + \frac{dg}{dx} \cdot f. \qquad 2.19$$

- Regra do quociente: Se f e g forem funções e h for uma função definida por $h = \frac{f}{g}$ onde $g \neq 0$, então se f' e g' existirem, $h' = \frac{g \cdot f' - f \cdot g'}{g^2}$.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\frac{df}{dx} - f\frac{dg}{dx}}{g^2}. \qquad 2.20$$

- Regra da cadeia: Se a função g for derivável em x e a função f for derivável em $g(x)$, então a função composta $f \circ g$ será derivável em x, e $(f \circ g)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$. Usando a notação de Leibiniz, considerando y uma função de u, definida por $y = f(u)$ e $\frac{dy}{du}$ existir, e se u for uma função de x, definida por $u = g(x)$ e $\frac{du}{dx}$ existir, então y será uma função de x e $\frac{dy}{dx}$ existirá e será dada por:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}. \qquad 2.21$$

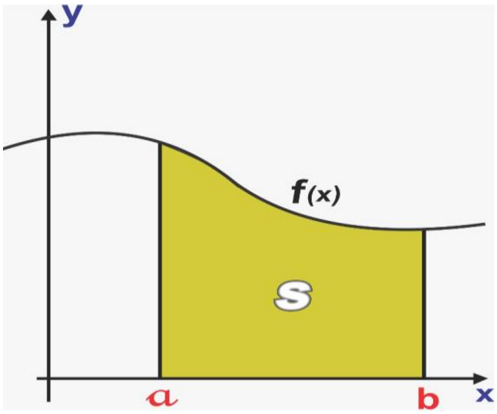
Essas são as principais propriedades das derivadas juntamente com as regras de derivação. No capítulo 5 será abordado as aplicações das derivadas em problemas abordados no ensino médio.

2.4 Integral

Nas seções 2.2. e 2.3, estudamos, respectivamente, os conceitos de limite e derivada. Como nas definições de limite e derivada, a integral também é um conceito fundamental do cálculo. Já vimos que o conceito de derivada está intimamente ligado ao problema de encontrar à taxa de variação instantânea de uma função. Agora veremos que a integral está ligada ao problema de determinar a área de uma figura qualquer (BRITO, 2013, p. 19-21).

Vamos considerar o seguinte problema: encontrar a área de uma região S qualquer que está sob a curva $y = f(x)$ de a até b. Isso nos diz que S está limitada pelo gráfico de uma função contínua f (onde $f(x) \geq 0$), as retas verticais $x = a$ e $x = b$ e o eixo x.

Figura 2 – Área da região S limitada pelo gráfico da função f(x).



Fonte: Dos autores, (2020).

A partir da figura 2, chegamos a seguinte definição:

Definição 2.4: A medida da área A da região S que está sob um gráfico de uma função contínua f é:

$$A = \lim_{||p|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \times \Delta x_i \qquad 2.28$$

onde, $||p||$ é a norma de partição de um subintervalo mais longo.

2.4.1 Propriedades da Integral

Agora será feita uma abordagem mais detalhada sobre antiderivadas, integral definida e indefinida como também algumas propriedades das integrais e suas regras de integração que é de fundamental importância para um estudo mais aprofundado acerca das integrais.

A integração é uma forma de reverter a derivação, com ela temos um artifício para recuperar a função original a partir da sua derivada. Diante deste cenário iremos adentrar no assunto das integrais pelos conceitos de antiderivadas e anti-diferenciais.

- Anti-derivadas: Considere a função $F(x) = f(x) + K$ cuja derivada $F'(x) = f'(x)$, então dizemos que $F(x)$ é a antiderivada de $f'(x)$, a nossa primeira constatação é que a função primitiva inclui uma constante, que durante o processo de derivação é descartada, já que sua derivada é nula, se fizermos o processo inverso para obter a função original teríamos $f'(x)$ para operar e consegui-lo, isso nos leva a uma indefinição da função obtida através da anti-diferenciação, a menos que conheçamos o valor da constante.

- Anti-diferenciais: A anti-diferenciação, opera apenas os processos para dedução de um esboço da função, o que chamamos de fórmula geral, no formato f(x)+k Como podemos encontrar diversas constantes, temos diversas funções, o que nos dá a possibilidade de operar, por exemplo as funções f'(x)+g'(x) derivadas de $f(x) + K$; $g(x) + K'$ mesmo que $f'(x) = g'(x)$, ao operarmos as funções derivadas utilizando a anti-diferenciação teremos $f(x)$; $g(x)$, que não nos garante meios de encontrar as primitivas, visto que não conhecemos meios para deduzir as constantes.

- Integral indefinida

  Seja a anti-diferencial:

$$\int f(x)dx \qquad 2.29$$

Observamos que a mesma corresponde a uma operação sobre pequenas seções de área, pois $f(x)dx$ corresponde a multiplicação de um segmento numérico de largura, dx, pela altura, o valor da função aproximada ao limite em cada ponto.

A operação da forma que se apresenta estende-se de $-\infty$ a $+\infty$. Analisando qual a natureza desta operação, podemos tomar dois valores para dx, sejam dx_1 e dx_2, sendo $dx_2 > dx_1$, quando analisamos este fato concluímos que a área do intervalo menor está dentro da área do maior, vemos que a operação comporta-se como uma soma de áreas, se somarmos todas as componentes de áreas ao longo da curva teremos uma área delimitada pela curva e o eixo x.

Chamamos esta operação de integral, seu símbolo é o mesmo da anti-diferenciação, pois devido aos fatos acima introduzidos e ao teorema fundamental do cálculo, que discutiremos adiante, a operação de anti-diferenciação pode ser chamada de integral indefinida.

- Integral definida

Aprofundando o conceito de que há uma soma de pequenos segmentos de área para cada ponto em uma curva, podemos delimitar uma seção da curva, através da adoção de um intervalo, desta forma teremos uma área definida, a qual chamamos de integral definida. Antes de detalhar o processo para encontrar a referida área faz-se necessário a observação de conceitos que serão úteis para seu desenvolvimento, o próximo tópico abordará a somatória, um procedimento que facilitará o estudo das somas sucessivas que propomos analisar.

Seja uma função $f(x)$ definida e contínua num intervalo real $[a, b]$. A integral definida de $f(x)$, de $\boldsymbol{a}$ até $\boldsymbol{b}$, é um número real, e é indicada pelo símbolo:

$$\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b) \tag{2.30}$$

onde, a e b são respectivamente os limites inferior e superior de integração e $f(x)$ é o integrando.

A seguir, será apresentado as principais integrais.

- Integrais de funções racionais:

$$\int du = u + K \tag{2.31}$$

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{(n+1)} + K, n \neq 1 \tag{2.32}$$

$$\int u^{-1} du = \int \frac{du}{u} = ln|u| + K \tag{2.33}$$

Apresentamos as integrais indefinida e definida e ainda, as principais propriedades que são os pilares teóricos para um curso de integrais. No capítulo 4 abordaremos as aplicações do cálculo diferencial que estão relacionadas aos conteúdos que são tratados no ensino médio.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

3.1 Classificação quanto à finalidade

A classificação quanto à finalidade deste estudo será a revisão de literatura. E de acordo com Marconi & Lakatos (1992, p. 3) a pesquisa pode ser considerada um procedimento formal com método de pensamento reflexivo que requer um tratamento científico e se constitui no caminho para se conhecer a realidade ou para descobrir verdades parciais. Significa muito mais do que apenas procurar a verdade: é encontrar respostas para questões propostas, utilizando métodos científicos.

3.2 Classificação quanto à abordagem

As abordagens utilizadas possuem aspectos exploratórios. Como enfatiza Gil (2002, p.41) essa forma de abordagem tem como objetivo proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a constituir hipóteses. Pode-se dizer que estas pesquisas têm como objetivo principal o aprimoramento de ideias ou a descoberta de instituições. Seu planejamento é, portanto, bastante flexível, de modo que possibilite a consideração dos mais variados aspectos relativos ao fato estudado.

3.3 Classificação quanto aos procedimentos técnicos

O procedimento técnico aplicado a esse trabalho será o bibliográfico, que é desenvolvido com base no material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos. Embora em quase todos os estudos seja exigido algum tipo de trabalho dessa natureza, há pesquisas desenvolvidas exclusivamente a partir de fontes bibliográficas. Boa parte dos estudos exploratórios pode ser definido como pesquisa bibliográfica. (GIL, 2002, p.44)

3.4 Etapas de desenvolvimento da pesquisa

A seleção de questões aplicáveis ao estudo de Cálculo na Educação Básica se deu no período de 19 de setembro a 17 de outubro do ano de 2020. Assim como, a explanação e discussão da proposta desenvolvida em que se baseia este estudo se dão através das etapas a seguir.

3.4.1 Etapa I Revisão de Literatura

Tabela 2 – Títulos utilizados para o referencial teórico.

Atividade	Período	Método de Coleta de Dados
A abordagem sobre Cálculo na Educação Básica	Setembro/2020	Levantamento bibliográfico
Introdução ao Cálculo	Outubro/2020	Levantamento bibliográfico

Fonte: Dos autores, (2020).

3.4.2 Etapa II Preparação e Desenvolvimento dos Problemas e Aplicações do Cálculo

Tabela 3 – Desenvolvimento dos Problemas e Aplicações.

Atividade	Período	Método de Coleta de Dados
Aplicações do Cálculo Diferencial	Outubro/2020	Levantamento bibliográfico
Cálculo Diferencial Aplicado à resolução de problemas da Educação Básica	Outubro/2020	Levantamento bibliográfico

FONTE: Dos autores, (2020).

3.4.3 Etapa III Apresentação da Proposta e Discussão

Após a demonstração dos Problemas e Aplicações será apresentada a Proposta e a Discussão da pesquisa, para uma explanação sobre o propósito do trabalho.

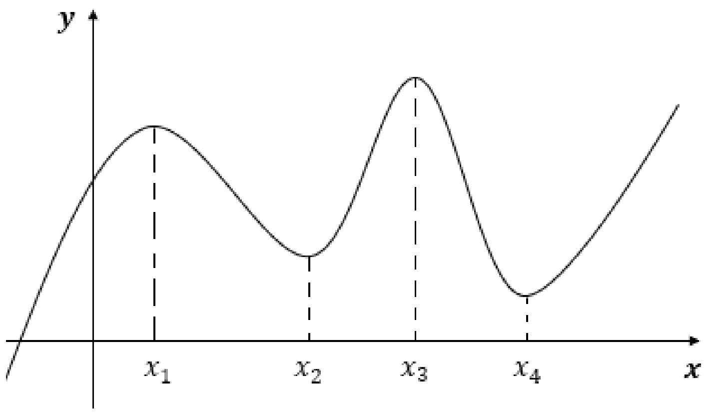
4 APLICAÇÕES DO CÁLCULO DIFERENCIAL

Neste capítulo abordaremos as principais aplicações do cálculo diferencial. Essas aplicações são relativamente simples e se relacionam com os conteúdos que fazem parte da grade curricular do ensino médio. A ideia é, devido à complexidade presente nas definições e teoremas do cálculo diferencial, utilizar aplicações e exemplos práticos no desenvolvimento das habilidades do aluno.

4.1 Valores de máximo ou mínimo de uma função

Considere a figura 4.1, que representa o gráfico da função $y = f(x)$ nos pontos de abscissas x_1, x_2, x_3e x_4. Esses pontos indicam os extremos da função, tais que $f(x_1)$ e $f(x_3)$ são chamados de máximos relativos e $f(x_2)$ e $f(x_4)$ são chamados de mínimos relativos (FLEMMING E GONÇALVES, 1992).

Figura 3 – Gráfico da função y = f(x).



Fonte: Adaptada de Flemming e Gonçalves (1992).

Em relação aos valores de máximo e mínimo da função, decorrem as seguintes definições e proposições (FLEMMING E GONÇALVES, 1992):

Definição 4.1.1: Uma função f tem máximo relativo em c, se existir um intervalo aberto I, contendo c, tal que $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in I \cap D(f)$.

Definição 4.1.2: Uma função f tem mínimo relativo em c, se existir um intervalo aberto I, contendo c, tal que $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in I \cap D(f)$.

Proposição 4.1.3: Suponhamos que $f(x)$ existe para todos os valores de $x \in (a,b)$ e que f tem um extremo relativo em c, onde $a < c < b$. Se $f'(c)$ existe, então $f'(c) = 0$.

A proposição 4.1 não é condição suficiente para determinar o extremo relativo da função f, ou seja, se $f'(c) = 0$, a função apresenta ou não extremo relativo. Desse fato, decorrem as seguintes definições e teorema utilizados na determinação dos valores de máximo ou mínimo da função f (FLEMMING E GONÇALVES, 1992; GUIDORIZZI, 2001).

Definição 4.1.4: Seja $f: [a,b] \to \Re$ uma função contínua, definida em um intervalo fechado $[a,b]$. Então f assume máximo e mínimo absoluto em $[a,b]$.

Definição 4.1.5: Dizemos que $f(c)$ é o máximo absoluto da função f, se $c \in D(f)$ e $f(c) \geq f(x)$ para todos os valores de x no domínio de f.

Definição 4.1.6: Dizemos que $f(c)$ é o mínimo absoluto da função f, se $c \in D(f)$ e $f(c) \leq f(x)$ para todos os valores de x no domínio de f.

Teorema 4.1: Sejam f uma função que admite a derivada de 2ª ordem contínua no intervalo aberto I e $c \in I$.

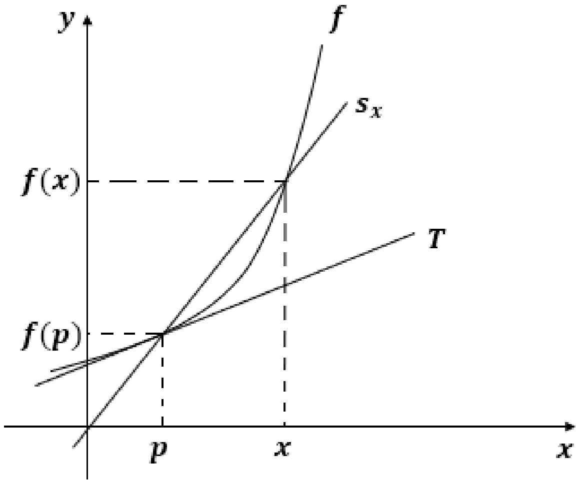
i. $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0 \Rightarrow c$ é ponto de mínimo no intervalo I;
ii. $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0 \Rightarrow c$ é ponto de máximo no intervalo I.

As definições, proposição e teorema apresentados nesta seção, serão utilizados na determinação dos valores de máximo ou mínimo da função quadrática. A função quadrática é estudada na educação básica e os seus valores extremos são caracterizados através do vértice da parábola.

4.2 A reta tangente

A interpretação geométrica da derivada da função f no ponto P indica a inclinação do gráfico de f em P e ainda, o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto P. Para uma melhor visualização, considere a curva f que passa pelos pontos $(p, f(p))$ e $(x, f(x))$, a reta secante s_x e a reta tangente T ao gráfico de f, conforme figura 4.2.

Figura 4 – Gráfico da função f que passa pelos pontos (p, f(p)) e (x, f(x)) e reta secante s_x.



Fonte: Adaptada de Guidorizzi (2001).

Através da figura 4.2 podemos calcular o coeficiente angular da reta s_x que passa pelos pontos $(p, f(p))$ e $(x, f(x))$.Seja m o coeficiente angular da reta s_x, então:

$$m = \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \quad 4.1$$

Na equação 4.1, quando x tende a p, m tende a $f'(p)$, ou seja:

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \quad 4.2$$

Assim, à medida que x vai se aproximando de p, a reta s_x vai tendendo para a posição da reta T de equação (GUIDORIZZI, 2001):

$$y - f(p) = f'(p)(x - p) \quad 4.3$$

A equação 4.3 indica a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$.

4.3 Movimento uniformemente variado

Assim como a reta tangente, a velocidade também se relaciona com a derivada. Em particular, a velocidade instantânea $v(t)$ é definida como sendo o limite, com Δt tendendo a zero, da razão que define a velocidade média, ou seja:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad 4.4$$

onde Δs é a variação do espaço e Δt a variação do tempo. A equação 4.4 sugere que a velocidade instantânea é obtida através da derivada do espaço em relação ao tempo.

De maneira análoga, a aceleração $a(t)$ é calculada através da derivada da velocidade em relação ao tempo. A aceleração é dada por:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t) = s''(t) \qquad 4.5$$

em que Δv é a variação da velocidade, $v'(t)$ é a primeira derivada da velocidade em relação ao tempo e $s''(t)$ é a segunda derivada do espaço em relação ao tempo.

No movimento uniformemente variado a aceleração é constante e diferente de zero. Para obtermos a equação horária do movimento uniformemente variado, vamos considerar que ele tem aceleração a, velocidade $v(t)$ no instante t e $v_0 = v(0)$ a velocidade inicial. Como a é constante, podemos escrever (ÁVILA, 1998):

$$a = \frac{v - v_0}{t} \rightarrow v = v_0 + at \qquad 4.6$$

que é a equação da velocidade.

Para obtermos a equação horária do movimento, sejam $s = s(t)$ o espaço percorrido pelo móvel até o instante t e $s_0 = s(0)$ o espaço no instante $t = 0$. Observe que a derivada de $s(t)$ é a velocidade dada na equação 4.6 (ÁVILA, 1998). Assim, a primitiva da função 4.6 gera a função $s(t)$, ou seja:

$$s(t) = v_0 t + \frac{at^2}{2} + k \qquad 4.7$$

onde k é uma constante. Se a posição inicial é s_0, então temos:

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \qquad 4.8$$

que é a equação horária do movimento.

4.4 Crescimento e decaimento exponencial

Crescimento e decaimento exponencial ocorrem com frequência na prática. Para descrever a fórmula empregada no crescimento/decrescimento exponencial, precisamos considerar que a taxa de variação da variável y em relação a variável x é proporcional à variável y, ou seja:

$$\frac{dy}{dx} = ky \qquad 4.9$$

onde que k é uma constante utilizada para indicar o decrescimento exponencial ($k < 0$) ou crescimento exponencial ($k > 0$).

Separando as variáveis e integrando a equação 4.9,

$$\int \frac{1}{y} dy = \int k dx \qquad 4.10$$

obtemos a solução geral (HALLET, 1997):

$$y = Be^{kx} \qquad 4.11$$

onde B é qualquer constante positiva.

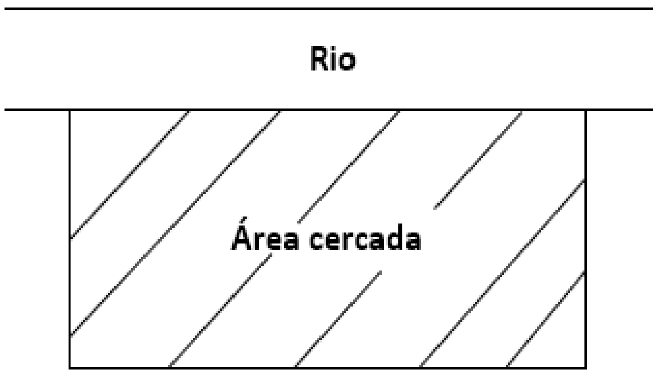
5 CÁLCULO DIFERENCIAL APLICADO À RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DA EDUCAÇÃO BÁSICA.

Neste capítulo será abordado os principais conceitos do cálculo diferencial na resolução de exercícios propostos presentes nos livros didáticos da educação básica. Pretende-se com isso, mostrar que é possível utilizar o cálculo diferencial na educação básica como ferramenta auxiliar na resolução de problemas.

Problema 5.1: (LIMA et al., 2006, p. 156) Com 80 metros de cerca um fazendeiro deseja circundar uma área retangular (ver figura 5.1) junto a um rio para confinar alguns animais.

a) Quais devem ser as medidas do retângulo para que área cercada seja a maior possível?

Figura 5 – Área retangular a ser circundada pelo fazendeiro.



Fonte: Adaptada de Lima et al. (2006).

Resolução na Geometria:

$P = x + x + y \rightarrow 2x + y \rightarrow y = 80 - 2x$

$$A = x.y \rightarrow (80 - 2x).x \rightarrow 80x - 2x^2$$

A$máximo = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4.a.c}{4.(-2)} = \frac{80^2 - 4.(-2).0}{-8} = \frac{-6400}{-8} = \ 800m^2$

$x \ do \ vértice = - \ \frac{b}{2a} = \ \frac{-80^2}{2(-2)} = \frac{-\ 80}{-4} = 20m$

$Como \ x = 20 \ e \ y = 80 - 2x, então \ 80 - 2.20 = 40m$

Resolução no Cálculo:

Neste problema é necessário encontrar os valores das medidas dos lados do retângulo, de tal forma que a sua área seja máxima. Seja x as medidas dos lados do retângulo perpendiculares ao rio e $80 - 2x$ a medida do lado paralelo ao rio. Assim, a área $S(x)$ do retângulo em função das medidas dos lados pode ser descrita pela equação 5.1.

$$S(x) = -2x^2 + 80x$$

A equação 5.1 representa uma parábola, com valor máximo $S_v = \frac{-(b^2-4ac)}{4a}$ no ponto $x_v = -\frac{b}{2a}$. Nesse caso, (x_v, S_v) representa as coordenadas do vértice da parábola 5.1. Assim, para $x_v = 20\ m$ teremos área máxima $S_v = 800\ m^2$.

Usando o cálculo para resolução, a área máxima através das coordenadas do vértice da parábola, consiste em derivar e igualar a zero a função $S(x)$ e com isso, encontrar as medidas dos lados do retângulo, ou seja,

$$S'(x) = 0 \Longrightarrow -4x + 80 = 0 \Longrightarrow x = 20\ m.$$

Assim, as medidas dos lados do retângulo serão $20\ m$ e $40\ m$. Multiplicando essas medidas encontramos a área máxima de $800\ m^2$, que representa a área a ser circundada pelo fazendeiro ao utilizar 80 m de cerca.

Problema 5.2: (Questão 06 – EsPCEx 2018, Prova D) A reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^2 - 6x + 1$, no ponto $(4, -7)$, é igual a:

a) $y = -2x + 1$.

b) $y = 3x - 19$.

c) $y = x - 11$.

d) $y = -3x + 5$.

e) $y = 2x - 15$.

Resolução na Geometria Analítica:

Para obtermos a resposta desejada, podemos utilizar os conhecimentos adquiridos ao longo do curso de geometria analítica, estudados no 3º ano do ensino médio. Nesse curso aprendemos que a equação da reta, com coeficiente angular m e coeficiente linear n , é definida por:

$$y = mx + n \qquad 5.2$$

Como a equação da reta apresenta um valor em comum com a parábola, podemos igualar as equações, ou seja,

$$x^2 - 6x + 1 = mx + n$$

$$x^2 - (m+6)x + (1-n) = 0 \qquad 5.3$$

A partir da equação 5.3e considerando que existe apenas uma solução real para os valores de x ($\Delta = 0$), obtemos:

$$m^2 + 12m + 4n + 32 = 0 \qquad 5.4$$

A equação 5.4 apresenta duas incógnitas, tornando-se impossível a sua solução. Mas sabemos que a reta $y = mx + n$ passa pelo ponto $(4, -7)$ e com essa informação escrevemos:

$$4m + n = -7 \qquad 5.5$$

Assim, podemos combinar as equações 5.4 e 5.5 e escrever o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} m^2 + 12m + 4n + 32 = 0 \\ 4m + n = -7 \end{cases} \qquad 5.6$$

e obter o valor de $m = 2$ e $n = -15$. A reta procurada é $y = 2x - 15$, presente na alternativa E.

Resolução no Cálculo:

Uma alternativa ao cálculo realizado se restringe ao uso da derivada. Para isso devemos calcular a derivada da função $f(x) = x^2 - 6x + 1$, o valor da função e de sua derivada no ponto $x = 4$ e realizar a substituição desses valores na equação $y - f(p) = f'(p)(x - p)$ para obter a reta tangente. A derivada da função é $f'(x) = 2x - 6$, $f(4) = -7$ e $f'(4) = 2$. Assim, a reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2 - 6x + 1$, no ponto $(4, -7)$, é:

$$y + 7 = 2(x - 4) \rightarrow y = 2x - 15$$

semelhante ao resultado obtido anteriormente.

Problema 5.3: (CHAVANTE & PRESTES, 2016, pág. 122 – Adaptado) A função $h: [2,7] \rightarrow \Re$, definida por $h(x) = -x^2 + 9x - 14$, descreve a altura em função do tempo de um projétil lançado do solo, com x em segundos e h em metros.

a) A que altura do solo o objeto se encontra 3 s após o lançamento?

b) Quais as expressões da velocidade e da aceleração do projétil?

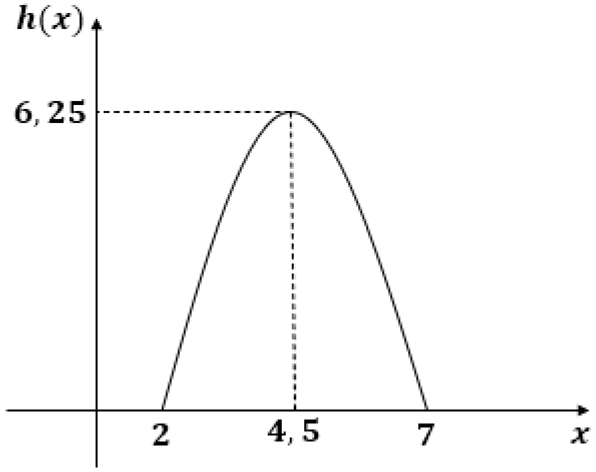
c) Qual deve ser a altura máxima atingida por esse projétil?

d) Faça uma representação esquemática do que ocorre.

Resolução no Cálculo:

Na resolução do item (a) basta substituir o valor de $x = 3\,s$ na função $h(x)$ para obtermos a altura de $4\,m$. No item (b) a expressão da velocidade é facilmente obtida através da derivada da função $h(x)$, ou seja, $v(x) = -2x + 9$. Derivando a velocidade $v(x)$ encontramos a expressão da aceleração igual a $a(x) = -2\,m/s^2$, que é constante. No item (c), igualamos a expressão da velocidade a zero para obtermos o instante$x = 4{,}5\,s$em que o projétil atinge a altura máxima. Substituindo $x = 4{,}5\,s$em $h(x)$ obtemos a altura máxima atingida pelo projétil igual a $6{,}25\,m$. A representação esquemática do que ocorre encontra-se na figura 5.2. Essa representação indica que o projétil toca o solo nos instantes $x = 2\,s$ e $x = 7\,s$ e ainda, que a altura máxima atingida pelo projétil no instante $x = 4{,}5\,s$.

Figura 6 – Representação esquemática do lançamento do projétil.



Fonte: Adaptado de Chavante e Prestes, (2016).

Problema 5.4: (CHAVANTE & PRESTES, 2016, pág. 147) Em certo mês, Rafael utilizou R$ 800,00 do seu cheque especial para pagar algumas contas. Por motivos pessoais, ele não pagou esse valor nem movimentou mais essa conta. Sabendo que o banco cobra, sobre o valor devido no cheque especial, juro composto de 10% ao mês:

a) Escreva a lei de formação de uma função $M: \mathbb{N} \to \Re_+^*$ que expresse o valor da dívida de Rafael de acordo com o tempo, em meses.

b) Calcule qual o valor da dívida de Rafael após 5 meses.

Resolução na Matemática Financeira:

No item (a) podemos utilizar a fórmula **M = C (1+i)ᵗ** para obtermos o valor da dívida M de Rafael em função do tempo t, ou seja, $M(t) = 800 \cdot 1{,}1^t$. Em relação ao item (b), substituímos $t = 5$ meses na lei $M(t) = 800 \cdot 1{,}1^t$eencontramos o valor aproximado da dívida de Rafael de R$ 1288,41.

Resolução no Cálculo:

Uma alternativa ao cálculo realizado consiste em utilizar a derivada e integral na obtenção do resultado, pois questões que envolvem juro composto se relacionam com crescimento exponencial. Nesse caso, sabemos que a taxa de variação do capital M em relação ao tempo t é proporcional ao capital, então podemos escrever:

$$\frac{dM}{dt} = 0{,}1M$$

$$\int \frac{dM}{M} = \int 0{,}1.dt$$

$$Ln|M| = 0{,}1.T + C$$

$$M = e^{0{,}1.T}.e^c, e^c = M_0$$

$$M = M_0.e^{0{,}1.T}; T = 0 \to M = 800$$

que possui solução particular:

$$M(t) = 800 \cdot e^{0{,}1t}$$

Considerando que $e^{0{,}1} \cong 1{,}1$, obtemos a resposta do item (a), ou seja, $M(t) = 800 \cdot 1{,}1^t$. O item (b) ocorre de maneira análoga ao resultado apresentado anteriormente.

Problema 5.5: (CHAVANTE & PRESTES, 2016, pág. 147) Uma determinada substância perde 40% de sua massa a cada mês. Considere 1250 g dessa substância em um recipiente. Determine uma função $m: \Re_+ \to \Re_+$ que expresse a massa dessa quantidade da substância com o passar do tempo.

Resolução por Funções:

Após 1° mês:

$M = 60\%\ de\ 1250$

$M = 0{,}6\ .\ 1250$

Após 2° mês:
$M = 60\%\ de\ (0{,}6\ .\ 1250)$

$M = 0{,}6\ .\ 0{,}6\ .\ 1250$

$M = 0,6^2 .\ 1250$

Após 3° mês:
$M = 60\%\ de\ (0,6^2 .\ 1250)$

$M = 0{,}6\ .\ 0,6^2 .\ 1250$

$M = 0,6^3 .\ 1250$

Assim, observando o padrão, conclui-se que, após t meses, $M = 1250.0,6^t$

Resolução no Cálculo:

Usaremos apenas o conhecimento de cálculo para obtermos amassa m da substância em função do tempo$t$, pois trata-se de um problema de decaimento exponencial. De sorte que a taxa de variação da massa m em relação ao tempo t é proporcional a massa da substância, então podemos escrever:

$$\frac{dm}{dt} = -0{,}40m$$

que possui solução particular:

$$m(t) = 1250 \cdot e^{-0{,}4t}$$

Considerando que $e^{-0{,}4} \cong 0{,}6$, obtemos a resposta procurada igual a$m(t) = 1250 \cdot 0{,}6^t$.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, realizamos um levantamento teórico sobre o estudo de cálculo diferencial e suas aplicações no ensino médio. As definições e aplicações do cálculo diferencial foram importantes e serviram de base na resolução dos exercícios que constam nos livros didáticos do ensino médio.

Mostramos, através da resolução dos exercícios, que é possível apresentar e aplicar os conceitos do cálculo aos estudantes do ensino médio. Entendemos que não é uma tarefa simples ao professor de matemática, mas é possível despertar o interesse pelo cálculo ao se trabalhar questões que estejam relacionada ao cotidiano do aluno.

A proposta de trabalhar o Cálculo na Educação Básica, mais precisamente no Ensino Médio, tem sido bastante discutida, seja em Dissertações e Teses, seja em Eventos Matemáticos. Visto que, no Brasil com o Movimento da Matemática Moderna – MMM houve a necessidade da retirada de alguns Conteúdos Matemáticos e um deles foi o Cálculo, retirado da matriz curricular em torno de 1996. Atualmente, o conteúdo é trabalhado na Educação Básica somente em Cursos Técnicos Integrados ao Ensino Médio na área de Exatas, mesmo assim devido à dificuldade em que o Cálculo é visto pelos alunos e até mesmo por professores, a disciplina deixa de ser apresentada a esses alunos no ensino médio

E levando em considerações esses aspectos, esta pesquisa foi estruturada com a finalidade de reforçar os subsídios que fundamentam tal proposta. Dessa forma, realizou-se um estudo sobre a Abordagem do Cálculo no Ensino Básico, bem como a Introdução do Cálculo Diferencial e Integral e suas propriedades para assim, obter os fundamentos necessários para expor suas Aplicações às resoluções de Problemas.

Com isso, foi possível apresentar de forma didática as possíveis aplicações do Cálculo nas disciplinas de Matemática, Física, Biologia, Química, Geografia, entre outros, com a finalidade de demonstrar as possibilidades de apresentar essas ferramentas matemáticas de forma compreensível e acessível para os estudantes do ensino médio.

Foi aplicado o cálculo diferencial em algumas áreas do conhecimento como física, biologia e geometria, tendo resultados satisfatórios pelo método de resolução dos problemas que simplifica bastante o processo, por outros métodos de resolução seria bem exaustivo resolver tais problemas. Foi abordado de uma maneira um tanto quanto simples, podendo facilmente ser cobrado no Ensino Médio, com isso proporcionando uma base sólida para os estudantes para futuramente usar na graduação.

Evidenciando que é possível acrescentar o estudo de Cálculo na Educação Básica, sem que haja comprometimento no aprendizado do aluno e aumento da carga horária docente. Porém, pode ser possível despertar o interesse pelo cálculo ao se trabalhar questões que estejam relacionadas ao conteúdo das disciplinas do ensino médio.

As nossas perspectivas é que este trabalho sirva de inspiração para futuros acadêmicos ou até mesmo professores, que possam explorar essa “ferramenta” que se chama cálculo em problemas que podem ser cobrados no ensino médio.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais – Matemática**. Brasília: MEC/SEF,1997.

AGUIAR, Edem Cordeiro de. **Noções básicas sobre derivadas para interpretação geométrica da função quadrática**: uma proposta para o ensino médio. TCC de Graduação (Licenciatura Plena em Ciências - Matemática e Física) – HUMAITÁ – AM: Universidade Federal do Amazonas, 2019. Disponível em <http://200.129.163.19:8080/handle/prefix/69/simple-search?Query=&sort_by= score&order=desc&rpp=10&etal=0&filtername=available&filterquery=2019&filtertype=equals> Acesso em 15/10/2020

APOSTOL, Tom Mike. **Calculus: One-Variable Calculus, With an Introduction to Linear Algebra.** New York: Second Edition, 1967.

ÁVILA, Geraldo. **Introdução ao cálculo**. Rio de Janeiro: LTC,1998.
BRASIL. Ministério da educação. **Base Nacional Comum Curricular:** Educação é a Base. Brasília: MEC, 2017.

BRITO, Janilson Claydson Silva. **O Cálculo Diferencial e Integral como ferramenta interdisciplinar no Ensino Médio.** Teresina – PI: EDUFPI,2013. Disponível em<file:///I:/TCC/profmat/000041928JANILSON_CLAYDSON_SILVA_BRITO.pdf>. Acessoem: 16/10/2020.

CARVALHO, L. M. et al. **Progressões**. Campinas – Sp :LIBUNICAMP, 2014.
CHAVANTE, Eduardo; PRESTES, D. Matemática. 1ª ano: Ensino Médio. São Paulo: SM, 2016.

COSTA, Marcos Antônio da et al. **Máximos e Mínimos**: **uma abordagem para o ensino médio.** 2013. Disponível em<https://repositorio.bc.ufg.br/tede/bitstream/tde/2947/5/Dissertacao%20Marcos%20Antonio%20da%20Costa.pdf> Acesso em 23/10/2020.

FINNEY, Rossy L. et al. **Cálculo de George B. Thomas Jr.** Vol. I**.** 10ª ed. Tradução: Paulo Boschcov. Revisão técnica: Leila Maria Vasconcellos Figueiredo. São Paulo - SP: Person Addison Wesley, 2002. Disponível em <https://autcontroltelecom .files.wordpress.com/2012/11/01cc3a1l-thomas3.pdf>. Acesso em 16/10/2020.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A**: **funções, limites, derivação e integração**. 5. ed. São Paulo: MAKRON Books,1992.

FLORET, RejeaneTexeira De Souza. **Uma proposta de introdução de noções de Cálculo no ensino médio**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Rio de Janeiro – RJ: Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2014. Disponível em:<https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2 /gettcc3.php? id=1293>. Acesso em 19/10/2020.

GIL, Carlos Antonio. **Como elaborar projetos de pesquisa.** 4º ed. São Paulo – SP: Atlas, 2002.

GUIDORIZZI, H.L. Um Curso de Cálculo. 5. ed. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2001.

JUNIOR, Jaime Alves de Oliveira. Um estudo sobre a implementação do cálculo diferencial e integral no ensino médio. Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – São Carlos –SP: Universidadede São Paulo, 2015.Disponível em<https :// teses .usp .br /teses /disponiveis/55/55136/tde-17122015-095517/es.php> Acesso em 15/10/2020

LADISLAU, Carlos Cley Evangelista. **NOÇÕES DE CÁLCULO DIFERENCIAL NO ENSINO MÉDIO**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Juazeiro – Ba: Universidade Federal do Vale do São Francisco, 2014. Disponível em <http :// tcc / Carlos % 20 Cley% 20 Evangelista %20 Ladislau_turma_2012. compressed.pdf> acesso em 16/10/2020

LAKATOS, Eva Maria. MARCONI, Maria de Andrade. **Metodologia do Trabalho Científico.** 4º ed. São Paulo – SP: Atlas, 1992.

LEONARDO, Fábio Martins de. **Conexões com a matemática**. Vol. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2016.

LEONARDO, Fábio Martins de. **Conexões com a matemática**. Vol. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2016.

LIMA, E.L. et al. **A matemática do ensino médio**. Vol. 1. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

MARIA, Otoniel Soares de. **CÁLCULO DIFERENCIAL NO ENSINO MÉDIO**: noções de limites, derivadas e aplicações. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Mossoró – RN: Universidade Federal Rural do Semi- Árido, 2013. Disponível em<https:// ppgmat.Ufersa.edu.br/wp-contente/uploads/sites/58/2016/02/Disserta%C3%A7%C3%A3o-Otoniel-Soares>acesso em 16/10/2020.

NEVES, Paulo de Tarso Smith. **Introdução ao Ensino do Cálculo e Aplicações da Derivada no Ensino Médio.** Macapá – AP: UNIFAP, 2016.Disponível em:< https://www2.unifap.br/matematica/files/2017/07/INTRODU%c3%87%c3%83O-AO-ENSINO-DO-C%c3%81LCULO-E-APLICA%c3%87%c3%95ES-DA-DERIVADA-NO-ENSINO-M%c3%89DIO.pdf>. Acesso em 16/10/2020.

PASCOAL, José Ueslei Marques. **“UM BREVE ESTUDO SOBRE A UTILIZAÇÃO DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NA EDUCAÇÃO BÁSICA DE JAGUARUANA-CE”**. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Mossoró – RN: Universidade Federal Rural do Semi-Árido, 2014. Disponível em <https://ppgmat.ufersa.edu.br/wp-content /uploads /sites /58/2016/02/Disserta% C3% A7%C3%A3o-Jos%C3%A9-Ueslei> acesso em 16/10/2020.

POFFAL, Cristiana Andrade. **Derivadas de Funções Reais de uma Variável**. 1ª ed. Rio Grande: Editora da FURG, 2016. Disponível em<https://lemas.furg.br/images/Apostilas/derivadas_2016.pdf>. Acesso em 16/10/2020.

RIBEIRO, Denylson da Silva Prado. **CÁLCULO DIFERENCIAL DE FUNÇÕES POLINOMIAIS NO ENSINO MÉDIO COM O USO DO GEOGEBRA: FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E SUAS APLICAÇÕES**. Dissertação (Mestrado) – Mossoró – RN: Universidade Federal Rural do Semi-Árido, 2016. Disponível em<https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=362> acesso em 16/10/2020

RICHIT, Andriceli. **Aspectos conceituais e instrumentais do conhecimento da prática do professor de cálculo diferencial e integral no contexto das tecnologias digitais**. 2010.vDisponível em <https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/91111/richit_a_me_rcla.pdf? sequence =1>. Acesso em 21/10/2020.

SANT´ANNA, B. et al. Conexões com a física. Vol. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2016.

SANTANA, João Paulo dos Santos. **A problematização por meio do GeoGebra**: uma proposta de atividades para o ensino de funções. Monografia (Graduação) – Mari – PB: Universidade Federal da Paraiba/CCEN, 2011. Disponível em<https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/123456789/30/1/JPSS14082012.pdf>. Acesso em 26/11/2020.

SANTOS, Marcelo de Souza. **UM ESTUDO SOBRE A INTRODUÇÃO DOS CONCEITOS DE CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO**. Porto Alegre – RS: Universidade do Rio Grande do Sul, 2012. Disponível em<https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/66867>. Acesso em 16/10/2020.

STEWART, James. **Cálculo**. Volume 1, 7ª ed. São Paulo – SP. Cencage Learning 2013.