INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO AMAPÁ
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
CAMPUS MACAPÁ

DYANE MARIA DE CARVALHO COSTA

MODELAGEM MATEMÁTICA APLICADA À GEOMETRIA ESPACIAL:
estudo de embalagens

MACAPÁ
2023

DYANE MARIA DE CARVALHO COSTA

MODELAGEM MATEMÁTICA APLICADA À GEOMETRIA ESPACIAL:

estudo de embalagens

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado ao Instituto Federal do Amapá como requisito avaliativo para obtenção do título de licenciada em matemática.

Orientador: Me. Francielck Domingos Freire.

MACAPÁ

2023

Biblioteca Institucional - IFAP
Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

C837m Costa, Dyane Maria de Carvalho
Modelagem matemática aplicada à geometria espacial:
estudo de embalagens
/ Dyane Maria de Carvalho Costa - Macapá, 2023.
53 f.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) -- Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amapá, Campus Macapá, Licenciatura em Matemática, 2023.

Orientador: Me. Francielck Domingos Freire.

1. Geometria;. 2. Modelagem matemática;. 3. Embalagem.. I. Freire, Me. Francielck Domingos , orient. II. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica do IFAP
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

DYANE MARIA DE CARVALHO COSTA

MODELAGEM MATEMÁTICA APLICADA À GEOMETRIA ESPACIAL:

estudo de embalagens

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado ao Instituto Federal do Amapá como requisito avaliativo para obtenção do título de licenciada em matemática.

Orientador: Me. Francielck Domingos Freire.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
gov.br FRANCIELCK DOMINGOS FREIRE
Data: 17/04/2024 16:39:27-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Me. Francielck Domingos Freire (Orientador)

Instituto Federal do Amapá (Campus Macapá)

Documento assinado digitalmente
gov.br HELINGTON FRANZOTTI ARAUJO DE SOUZA
Data: 18/04/2024 09:20:11-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Me. Helington Franzotti Araújo de Souza (Membro interno)

Instituto Federal do Amapá (Campus Macapá)

Documento assinado digitalmente
gov.br PAULO ROBSON PEREIRA DA CUNHA
Data: 19/04/2024 10:22:16-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Me. Paulo Robson Pereira Cunha (Membro externo)

Instituto Federal do Amapá (Campus Porto Grande)

Apresentado em: 15 / 12 / 2023

Conceito/Nota: 93,34

AGRADECIMENTOS

A Deus, que com sua infinita bondade, me concedeu força, paciência e coragem para seguir adiante, superando as adversidades encontradas nesta trajetória acadêmica.

Ao orientador, pelo apoio, orientação, e pelas ideias, que tornaram esta, uma experiência inspiradora ao longo de todo o período de estudo até a finalização desta monografia. Sou imensamente grata pela paciência e incentivo recebidos.

Do fundo do coração, a todos aqueles que, de alguma forma, estiveram envolvidos nesta pesquisa, como meus professores e alguns colegas de classe. Suas contribuições foram inestimáveis para o sucesso deste trabalho.

Também gostaria de expressar minha gratidão a todos os amigos e parentes que estiveram presentes, manifestando apoio e incentivo na busca dos meus objetivos. Sua presença e palavras de encorajamento significaram muito para mim.

Por fim, gostaria de agradecer imensamente aos meus filhos, que sempre serão o meu alicerce e a minha fonte de motivação nos momentos difíceis. Seu amor e apoio incondicionais foram essenciais para eu não desistir.

“Os modelos matemáticos ajudam a entender o mundo. Os modelos de vida proporcionam os meios para admirá-lo.”

(BASSANEZI, 2015).

RESUMO

Introdução: A Geometria Espacial destaca-se por estudar as figuras geométricas que ocupam lugar no espaço e são caracterizadas por possuírem três dimensões: altura, largura e volume. Diante disso, este estudo apresenta uma análise sobre a Modelagem Matemática aplicada à geometria espacial por meio da análise de embalagens. Objetivo: Identificar e analisar as possíveis contribuições da realização de atividades de Modelagem Matemática aplicada à geometria espacial em um estudo de embalagens. Metodologia: Para atingir o objetivo proposto, o estudo foi desenvolvido, no primeiro momento, por meio de uma pesquisa bibliográfica de natureza qualitativa, com o intuito de aprofundar o tema e reconhecer a Modelagem Matemática como uma alternativa metodológica para o ensino-aprendizagem da Geometria Espacial. Em seguida, com uma pesquisa em campo e intervenção pedagógica em sala de aula. Resultados e discussão: Foram analisadas um total de 26 referências que abordam a temática proposta, alcançando assim o resultado esperado diante dos objetivos desta pesquisa. Conclusão: Dessa forma, é possível perceber que a Modelagem Matemática, no processo de ensino-aprendizagem, tem como uma de suas finalidades promover a interligação entre a Geometria Espacial e os problemas considerados complexos, levando em consideração o cotidiano dos alunos para auxiliar na compreensão. Diante desse cenário, é possível desenvolver o raciocínio lógico e a criticidade dos educandos na resolução de problemas.

Palavras-chave: geometria; modelagem matemática; embalagem.

ABSTRACT

Introduction: Spatial Geometry stands out for studying geometric figures that occupy space and are characterized by having three dimensions: height, width and volume. Therefore, this study presents an analysis of Mathematical Modeling applied to spatial geometry through packaging analysis. Objective: Identify and analyze the possible contributions of carrying out Mathematical Modeling activities applied to spatial geometry in a packaging study. Methodology: To achieve the proposed objective, the study was developed, initially, through bibliographical research of a qualitative nature, with the aim of deepening the topic and recognizing Mathematical Modeling as a methodological alternative for the teaching-learning of Geometry Spatial. Then, with field research and pedagogical intervention in the classroom. Results and discussion: A total of 26 references were analyzed that address the proposed theme, thus achieving the expected result given the objectives of this research. Conclusion: In this way, it is possible to see that Mathematical Modeling, in the teaching-learning process, has as one of its purposes to promote the interconnection between Spatial Geometry and problems considered complex, taking into account the students' daily lives to assist in understanding. Given this scenario, it is possible to develop students' logical reasoning and criticality when solving problems.

Keywords: geometry; mathematical modeling; packaging.

LISTA DE FIGURAS

FLUXOGRAMA

GRAFICOS

LISTA DE SIGLAS

FI	Instituto Freudenthal
GE	Geometria Espacial
GPS	Sistema de Posicionamento Global
ICTMA	Conferências Internacionais sobre o ensino de Modelagem e Aplicação Matemática
ICME	Congresso Internacional de Educação Matemática
IOWO	Instituto para o Desenvolvimento da Educação Matemática
SBEM	Sociedade Brasileira de Matemática

Sumário

1 INTRODUÇÃO

A modelagem matemática, de acordo com Biembengut e Hein (2013, p.18), pode ser uma estratégia que desperta o interesse dos estudantes por questões matemáticas e os auxilia a desenvolver habilidades de raciocínio de alto nível. Ao utilizar a modelagem, os alunos têm a oportunidade de solucionar problemas por meio de questionamentos e desenvolver o pensamento crítico.

A partir da análise e manipulação de objetos reais, os alunos podem visualizar uma variedade de formas e estabelecer relações de semelhança e proporção. Ao realizar atividades práticas, como analisar embalagens, eles podem expandir seu entendimento sobre pontos, retas, ângulos, vértices e faces.

Diante disso, propomos a seguinte questão passível de investigação: quais são as possíveis contribuições da realização de atividades de Modelagem Matemática aplicada à geometria espacial, utilizando embalagens, no contexto da aprendizagem de alunos do 4º módulo do Proeja no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amapá - IFAP?

O segundo capítulo aborda a Evolução Histórica da Modelagem Matemática, que se consolidou nas décadas de 70 e 80, alcançando seu auge no final dos anos 90. Em seguida, é explorada a Geometria por meio da Modelagem Matemática, com o objetivo de estudar as figuras geométricas tridimensionais presentes no espaço, caracterizadas por altura, largura e volume. Abordaremos esse tema por meio da Modelagem Matemática, buscando uma melhor compreensão do conteúdo, o desenvolvimento de habilidades e raciocínios para o reconhecimento das figuras espaciais, além de investigações para a solução dos problemas propostos.

Dessa forma, para realizar uma pesquisa teórico-bibliográfica e uma pesquisa de campo, foi realizado um trabalho em sala de aula, com a intervenção pedagógica em uma turma do 4º módulo do Proeja do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amapá - IFAP, no turno da noite, composta por 22 alunos. A proposta metodológica consistiu na realização de uma oficina, na qual foi abordada a geometria espacial por meio da Modelagem Matemática, com ênfase no tema das embalagens.

2 OBJETIVOS

2.1 objetivo geral

Identificar e analisar as possíveis contribuições da realização de atividades de Modelagem Matemática aplicada à geometria espacial, a partir de embalagens.

2.1.1 específicos

- Ressaltar a concepção das noções e das representações matemáticas na geometria espacial através da modelagem;
- Contextualizar a evolução histórica da Modelagem Matemática;
- Possibilitar a criação de métodos para resolução de situações problemas da geometria espacial, relacionados ao uso das embalagens.

2.2 fundamentações teórica

2.3 modelagens matemática

A modelagem matemática refere-se à investigação, por meio da Matemática, de uma situação-problema que geralmente não tem origem na própria matemática. Durante o processo de modelagem, são compartilhados etapas e procedimentos, muitas vezes expressos por meio de esquemas conhecidos como ciclos de modelagem matemática (ALMEIDA, 2020).

No entanto, trata-se de uma técnica de ensino que associa situações do cotidiano dos estudantes a conteúdos matemáticos. A idéia é abordar fenômenos das mais diversas áreas científicas para promover o ensino da matemática, invertendo, assim, um modelo de ensino comum.

Nesse sentido, o problema geralmente é discutido e apresentado à turma durante a aula. A partir daí, surgem os conteúdos matemáticos que precisam ser aplicados pelos estudantes para oferecer soluções para o mundo real. No entanto, alguns professores permitem que a turma escolha os temas que geraram o conteúdo matemático, enquanto outros educadores optam por definir eles mesmos as situações do cotidiano que serão abordadas, respeitando o programa estabelecido pelo currículo. Não há uma ordem correta para aplicar a estratégia da modelagem matemática, mas é importante que ela seja estabelecida no plano de aula (CALDEIRA, 2015).

A introdução de atividades de modelagem matemática nas salas de aula pode assumir diferentes configurações, dependendo do conhecimento que os estudantes e os professores possuem, e dos objetivos com os quais são realizadas. Nesse sentido, durante o desenvolvimento das atividades de modelagem, uma etapa pode receber mais ênfase do que outra, de acordo com as finalidades pelas quais são introduzidas na sala de aula (ALMEIDA, 2018).

Considerando as finalidades da introdução de atividades de modelagem matemática na sala de aula, Galbraith (2012) aponta essencialmente dois modos de compreendê-la: modelagem como conteúdo e modelagem como veículo. No primeiro modo, a finalidade é desenvolver habilidades de construção e utilização de modelos matemáticos, e, nesse caso, as etapas são traduzidas em termos de competências a serem desenvolvidas pelos alunos durante o processo. A modelagem como veículo, por sua vez, caracteriza-se pela finalidade de construir modelos para aprender matemática, e, nesse caso, a ênfase está nas potencialidades das atividades para o aprendizado da matemática. Ainda segundo Galbraith (2012), a modelagem como conteúdo e como veículo possuem orientações distintas, dependendo de quem é o fim e de quem é o meio. No entanto, ambas destacam a aprendizagem como um aspecto estrutural no desenvolvimento das atividades de modelagem.

2.4 evoluções histórica da modelagem matemática

Um estudo, mesmo que não muito aprofundado da História da Matemática, nos leva ao encontro de diversas situações em que temos um problema prático, por vezes do cotidiano, para se resolver através de ferramentas matemáticas. No século V a.C, os egípcios, segundo o grego Heródoto, usavam conceitos de geometria plana para que, após as enchentes do rio Nilo, os agrimensores determinam a redução sofrida pelo terreno, passando o proprietário a pagar um tributo proporcional ao que restara.

> A história da presente busca as condições de perspectiva para que determinado saber constatar enquanto verdade. Verdade, não no sentido de uma verdade verdadeira que estava esperando para ser desvelada, mas, no sentido de algo construído em determinado momento histórico e que legitime determinado saber (FOUCAULT 2011, p. 17).

A Modelagem Matemática apresenta soluções para problemas não-matemáticos proveniente de outras áreas da realidade por meio da obtenção de um modelo. A Modelagem busca relacionar o discernimento prático do aluno, do seu cotidiano com conhecimentos matemáticos, e, para que ocorra esse relacionamento, os alunos são convidados a indagar e/ou investigar através da matemática um fenômeno da nossa realidade. Doravante desses excertos finalizamos que embora os pesquisadores apresentem conceituações diversas podemos considerar que a Modelagem tem por objetivo estudar, resolver e compreender um problema da realidade, por meio da Matemática (ARAÚJO, 2002, 2007; MEYER, CALDEIRA, MALHEIROS, 2011; SOUZA, LUNA, 2014). Para Magnus (2012), consequentemente, o processo de Modelagem Matemática é uma importante ferramenta para o uso de todas as ciências, relacionando a matemática com outras áreas do conhecimento humano. Essa tendência, que se insere na corrente de pensamento conhecida como estruturalismo, contribuiu para o surgimento da Matemática Aplicada, na qual os matemáticos emprestam capacidade de generalização para a criação de modelos que possam explicar fenômenos aparentemente não matemáticos. Deste modo, uma vez que as estruturas são identificadas, destacamos as vantagens do uso de modelos sustentados por alguma teoria matemática: informações novas sobre a situação problema; previsões e projeções; estratégias; economia, já que situações diferentes podem admitir um mesmo modelo. Embora a idéia de Modelagem Matemática acompanhe a própria História da Matemática, a expressão, em seu conceito moderno, surgiu durante o renascimento, principalmente após Galileu criar o novo método científico, combinando experimentação e teorização matemática.

Já a idéia de modelo matemático, segundo Lima Filho, “vem sendo amplamente usada por engenheiros, físicos, estatísticos e economistas desde a década de 1940, pelo menos” (LIMA FILHO, 2008, p. 15). Destarte, com o crescente interesse dos matemáticos e profissionais na Matemática Aplicada, os modelos ganharam mais precisão e confiabilidade, passando a ser essencial nas estruturas das ciências ditas não exatas. Bassanezi (2015) acrescenta ainda que “a importância do modelo matemático consiste em se ter uma linguagem concisa que expressa nossas idéias de maneira clara e sem ambiguidade.

Deste modo, a Modelagem Matemática se apresenta como uma das formas mais inclusivas para a aprendizagem de um novo conteúdo, contribuindo para a construção do pensamento matemático que deve ser desenvolvido pelo aluno. Nesse cenário, cabe ao professor orientar as reformulações e valorizar as soluções mais adequadas no processo de ensino e aprendizagem, promovendo interações construtivas entre professores e alunos. Esses processos são constituídos por comportamentos complexos, fornecendo suporte para a formação dos alunos (MAGNUS, 2012).

De acordo com a visão de Nunes et al. (2010, p. 58), reforça as idéias de crescimentos por Klein e defende que a inserção do ensino formal dos conhecimentos matemáticos calcados na instituição escola, sejam também dispostos a outras ciências ou áreas de conhecimento que exijam para os indivíduos impulsionar conceitos e conhecimentos com base no raciocínio matematização. Todavia, um cometimento para que os alunos não fiquem limitados somente a aprendizagem das regras, mas saibam aplicá-las nos enfrentamentos da vida extra sala de aula, é um dos pilares do aprendizado escolar para indivíduos**.**

Hans Freudenthal (2013) orienta que todo conceito matemático esteja ligado a alguma realidade, uma metodologia, ou um modo de pensamento filosófico que retoma a importância dos fenômenos, os quais devem ser estudados em si mesmos, de onde podemos partir para expandir o conceito do aluno. Há sempre novas expectativas de expansão do conceito, incluindo novos instrumentos de raciocínio, novas realidades fenomenológicas, ou novas relações lógicas e matemáticas.

Hans Freudenthal, (2013) como também Almeida (2018), foram dois pensadores identificados com a Modelagem Matemática, e trouxeram para o centro das atenções o olhar e a importância no processo de reconhecimento da Modelagem Matemática como um recurso metodológico para o ensino de ciência dos números.

À vista disso, a Modelagem Matemática adquire como uma nova propensão, e perspectiva didática, o crescente aumento de materiais de estudos, as produções acadêmicas de Aplicações e Modelagem no ensino de Matemática para serem utilizadas no contexto escolar. A partir de então, houve diversos congressos internacionais em Educação Matemática (ICMEs), com o propósito de firmar as tendências matemáticas, como o ICME-3, que foi realizado em 1973 na cidade de Karlsruhe, situada na Alemanha, e em 1983, na cidade de Exeter, no Reino Unido, foi realizada a International Conferences on the teaching *of Mathematical Modelling and Application* (ICTMA), que tem por objetivo a pesquisa, o ensino e a prática da Modelagem Matemática (FREUDENTHAL, 2013).

Na Holanda, em 1971, foi criada por Freudenthal o Instituut Ontwikkeling Wiskundeonderwijs – IOWO -, (Instituto para o Desenvolvimento da Educação Matemática) que atualmente é chamada de Freudenthal Institute (FI), (Instituto Freudenthal) tornando-se mundialmente uma referência para a Educação Matemática. Este Instituto possibilitou através dos seus projetos demonstrar o desenvolvimento da competência crítica, recusando qualquer material que viesse pronto, possibilitando ao aluno a criação de situações do cotidiano que levasse à matematização, desenvolvendo suas ideias matemáticas e seus conceitos, tornando o ensino da Matemática uma etapa distinta, mais importante e mais significativa.

No percurso da evolução da Educação Matemática ergueu-se outro momento significativo**,** o movimento chamado “utilitarista”, identificado por uma prática dos entendimentos matemáticos para a ciência e a sociedade, que propulsor a formação de novos grupos de pesquisadores. Defronte, ocorreram eventos que tinham como objetivo consentir ao estudante desenvolver competência, experiência e aptidão para matematizar e modelar problemas reais. Dentre tantos grupos de estudos**,** ressalta**,** os liderados por Hans Freudenthal, o IOWO na Holanda, o de Bernheim Boss e Mogens Niss na Dinamarca, e em 1983, consolidou se o Grupo Internacional de Modelagem Matemática e Aplicações (ICTMA), sendo realizado bianualmente o Internacional Congresso Internacional de Educação Matemática (ICME).

Entretanto, destes movimentos, a Modelagem Matemática passou por um frequente aumento nas pesquisas, fomentações de eventos e conferências; surgimento da necessidade de novas publicações, de cursos de extensão e pós-graduação; e um avanço significativo nos cursos de licenciatura que vêm sendo incluída a Modelagem Matemática como componente curricular. A Sociedade Brasileira de Matemática (SBEM), pertinente instituição voltada para as produções acadêmicas, proporciona um vasto material que identifica, organiza, descreve e instrumentaliza os estudantes na realização das atividades específicas, tais como os trabalhos de extensão, eventos, graduação e pós-graduação. Esta instituição mantém grupos permanentes voltados ao estudo da modelagem, com uma vasta produção acadêmica, fortificando a modelagem como estratégia de ensino na educação. (MAGNUS, 2012).

A partir dos anos 1990, os acervos de estudos feitos por pesquisadores do ICMI deram consonância para o amadurecimento do ensino e aprendizagem de Aplicação da Modelagem, temas centrais na Educação Matemática. As pesquisas, experiências com aplicações em sala de aula, incessantemente são apresentadas em eventos e conferências, intensificou-se também o número de adeptos como por exemplo, professores com interesse em cursos de graduação e pós graduação, publicações e cursos de licenciaturas que consiste em que se criem modelos para ensinar os conteúdos matemáticos, o qual se afaste somente do modo tradicional de apresentar este componente curricular aos alunos**,** assim incluindo a Modelagem Matemática no ensino como componente curricular.

2.5 geometrias por meio da modelagem matemática

Geometria, (geo+metria), tem sua tradução literal do grego que é: “medir à terra”, conforme o site Etimologia: a origem do conceito. Com esse conhecimento, temos uma noção do motivo de seu surgimento e de sua função. Na área da Matemática, estuda o espaço e as figuras que nela podem se configurar (CALDEIRA, 2015).

A Geometria Espacial vai além de fórmulas prontas, pois estuda objetos que possuem mais de uma dimensão e ocupam lugar no espaço. Isso exige que o professor busque novas metodologias de ensino, com o objetivo de facilitar o aprendizado dos alunos. Uma abordagem eficaz é a utilização da Modelagem Matemática, que permite um aprendizado contextualizado e possibilita ao estudante tornar-se um buscador de conhecimento, ao invés de apenas um seguidor. Nessa perspectiva, o aluno é estimulado a buscar constantemente novos campos, novas visões, questionar, discutir, refletir e formar suas próprias convicções (BURAK, 2010).

Dessa forma, a Modelagem Matemática desempenha um papel significativo na formação crítica dos alunos, tornando o processo de aprendizagem mais interessante e prazeroso. Essa abordagem facilita a adesão dos estudantes e promove uma maior troca e absorção de conhecimento, resultando em uma maior autonomia tanto para o aluno quanto para o professor. Assim, a Modelagem Matemática se apresenta como uma estratégia viável no ensino de Geometria Espacial, indo além do ensino tradicional e do modelo conteudista do ensino da matemática.

Através da Modelagem Matemática, busca-se alcançar o conhecimento por meio da realidade do aluno, aplicando-o de forma construtiva. Valoriza-se a importância das interações no meio social, visando despertar nos estudantes um contato com a Matemática. Embora muitas pessoas considerem a Matemática como um assunto difícil, ela foi construída e aperfeiçoada ao longo do tempo, baseada em teorias válidas e amplamente utilizadas na atualidade, continuando em constante evolução (BASSANEZI, 2014).

O desenvolvimento do pensamento por meio da Modelagem Matemática estimula o conhecimento do aluno, transformando-o em um ser pensante com atitudes voltadas para o bem estar coletivo. Esse processo também desenvolve e aguça o senso crítico, além de proporcionar um ensino mais prazeroso e envolvente. Assim, o ensino-aprendizagem serve como orientação para as ações direcionadas aos objetivos educacionais, ultrapassando os limites físicos da escola. Isso permite que o aluno perceba a presença da Matemática na realidade (SANTOS & NACARATO, 2014).

Para Caldeira (2015), a Geometria Espacial é uma área da matemática que se dedica ao estudo das figuras no espaço, ou seja, aquelas que possuem mais de duas dimensões. Por geralmente, a Geometria Espacial pode ser delineada como a geometria no espaço, que estuda as formas e as dimensões com suas propriedades. Assim, tal qual a Geometria Plana, ela está pautada nos conceitos basilares e intuitivos que chamamos "conceitos primitivos" os quais possuem origem na Grécia Antiga e na Mesopotâmia (cerca de 1000 anos a.C.).

A geometria é uma vertente da matemática que estuda as formas presentes ao nosso redor. Por isso, as formas geométricas são divididas em planas, não planas e espaciais, todavia é um ramo da matemática que se ocupa do estudo das propriedades do espaço, tais como: pontos, planos, polígonos, retas, poliedros, curvas, superfícies, entre outros.

Uma trajetória que nos conduz ao objetivo almejado remonta séculos atrás, tendo como ponto de origem o antigo Egito. Nesse contexto merece destaque a resolução de enigmas inerentes às medidas, fornecendo uma base teórica para a medição de elementos fundamentais, como a bússola, um instrumento de importância primordial, assim como dispositivos como o pantógrafo e o teodolito. Com o tempo com as ascensões conseguidos durante seu estudo, a geometria é hoje a base teórica de outras questões como o Sistema de Posicionamento Global, mais conhecido pela sigla GPS (em inglês Global Positioning System), é um sistema de navegação por satélite que fornece a um aparelho receptor móvel a sua posição, combinado com a análise matemática e as equações diferenciais. Também é muito útil e consultado na elaboração de projetos tais como o desenho técnico ou na montagem de artesanato (CALDEIRA, 2015).

A geometria não é plausível de erros, pois ela surge a partir dos problemas cotidianos apresentados e do desenvolvimento de sistemas axiomáticos que propunham uma diminuição no erro com uma abordagem rigorosa. O primeiro sistema chegou por quem hoje é considerado o pai da geometria, o matemático grego Euclides. Seu livro “Os Elementos” reúne os seus ensinamentos no mundo acadêmico da época e é uma das obras mais conhecidas e que mais voltas deram ao mundo. Nela, Euclides levanta uma série de postulados e teoremas que seguem válidos até hoje, assim que muitos de nós podemos reconhecê-los nas aulas de geometria (SANTOS & NACARATO, 2014).

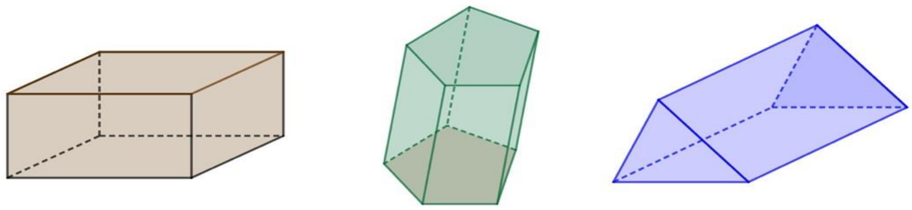
Então, o que citamos a seguir se deve a Euclides e o conhecimento deixado por ele para as futuras gerações, tais como: entre dois pontos só se pode traçar uma linha reta, qualquer segmento retilíneo pode ser estendido indefinidamente, todos os ângulos retos são iguais, a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180° e em um triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos (SANTOS & NACARATO, 2014).

A Geometria Espacial, assim como a geometria de modo geral, faz parte do nosso cotidiano e nesse contexto, as embalagens se destacam como uma amostra bastante relevante e interessante para o processo de ensino e aprendizagem.

2.6 poliedros

Poliedro é a reunião de um número finito de polígonos planos, onde cada lado de um desses polígonos é também o lado de um, e apenas um outro polígono. A palavra poliedro é formada por duas palavras gregas: pólis que significa várias (dando origem ao prefixo poli) e hédrai que significa faces (dando origem ao sufixo edro), cuja superfície é formada por partes planas. Esses sólidos não têm formas arredondadas (DIAS; SAMPAIO, 2013, p. 16). Como apresentado através da figura 1:

Figura 1 - Poliedro



Fonte: Próprio autor (2023)

Já as figuras que não são poliedros possuem curvas ou formas arredondadas em sua superfície, como apresentadas na figura 2:

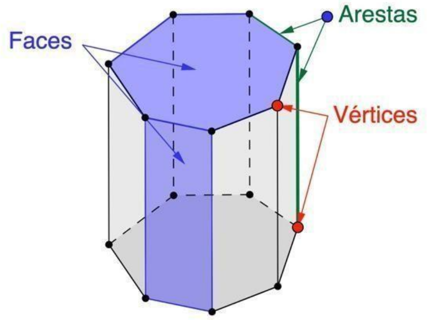
Figura 2 - Figuras que não são poliedros

Fonte: Próprio autor (2023)

Elementos de um poliedro: Como representado através da figura 3.

- Face (um polígono): São os polígonos que limitam os poliedros.
- Aresta (um segmento): é o lado do polígono que limita o poliedro ou a interseção de dois polígonos que formam faces da figura.
- Vértice (um ponto): é cada um dos pontos de interseção de 3 ou mais arestas.

Figura 3 - Vértices, arestas e faces



Fonte: Próprio autor (2023)

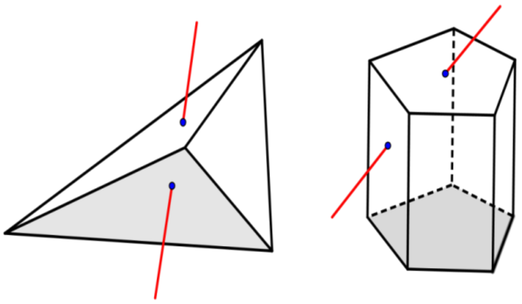
Quadro 1 - Nomes dos poliedros quanto ao número de faces;

Quant. de faces	Nome do Poliedro	Quant. de faces	Nome do Poliedro
4	Tetraedro	10	Decaedro
5	Pentaedro	11	Undecaedro
6	Hexaedro	12	Dodecaedro
7	Heptaedro	13	Tridecaedro
8	Octaedro	...	...
9	Nonaedro	20	Icosaedro

Fonte: Próprio autor (2023)

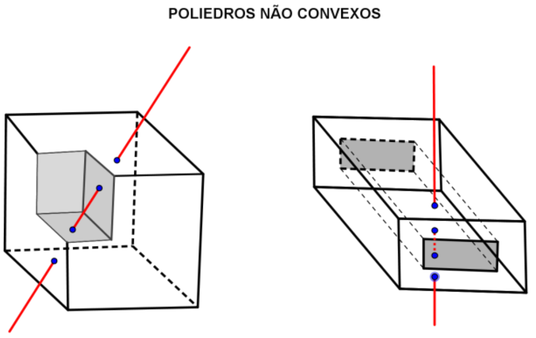
Um poliedro é convexo se qualquer segmento de reta, não paralelo às faces, o corta em no máximo, dois pontos, como representado através da figura 4. Caso contrário, é chamado de poliedro não-convexo (NEVES, 2017). Estes poliedros são convexos como apresentados na figura 5, pois todos os segmentos de reta (não paralelos às suas faces) os cortam em no máximo dois pontos.

Figura 4 - Poliedros Convexos



Fonte: Próprio autor (2023)

Figura 5 - Poliedros não Convexos



Fonte: Próprio autor (2023)

Um poliedro convexo é regular quando todas as faces são polígonos regulares iguais e em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas. Os poliedros convexos não possuem reentrância e os poliedros não-convexos possuem essa particularidade. Poliedros convexos estão inteiramente situados em um mesmo semi espaço em relação a qualquer uma de suas faces (NEVES, 2017).

2.4.1 relação de euler

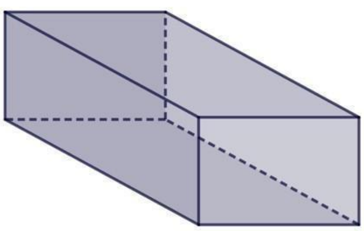
A relação de Euler é uma igualdade que relaciona o número de vértices, arestas e faces em poliedros convexos. Ela diz que o número de faces mais o de vértices é igual ao número de arestas mais dois (STEWART, 2015).

Em um poliedro convexo de F faces, A arestas e V vértices, tem-se necessariamente que: $V - A + F = 2$.

O Teorema ou Relação de Euler é válido para os poliedros convexos e para alguns poliedros não-convexos.

Exemplos:

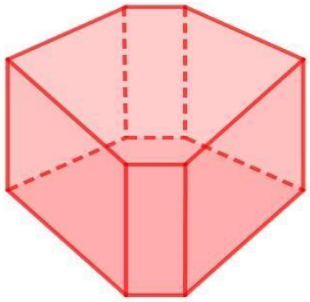
Figura 6 - Poliedro convexo



Fonte: Próprio autor (2023)

Este poliedro é convexo com: 8 vértices, 6 faces e 12 arestas. Então, vale a relação de Euler: 8 + 6 – 12 = 2.

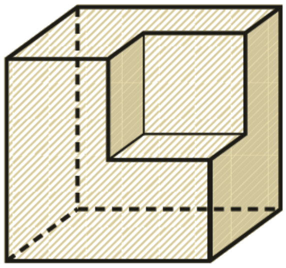
Figura 7 - Poliedro convexo



Fonte: Próprio autor (2023)

Poliedro convexo com: 12 vértices, 18 arestas e 8 faces. Então, verifica-se a relação de Euler: 12+8 – 18 = 2.

Figura 8 - Poliedro não - convexo

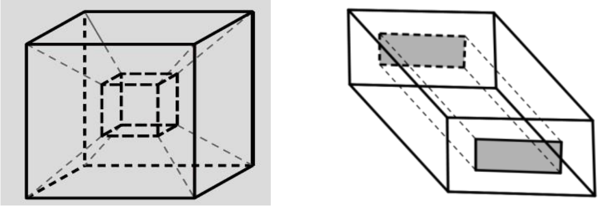


Fonte: Próprio autor

Este poliedro é não convexo, porém vale a relação de Euler. Veja que há: 14 vértices, 21 arestas e 9 faces e que: 14+ 9 – 21 = 2.

Os poliedros não convexos em que normalmente não vale a relação de Euler são os que possuem “buracos” em sua estrutura.

Figura 9 - Poliedros não - convexos



Fonte: Próprio autor (2023)

A relação criada pelo matemático suíço Leonhard Euler possui extrema importância na determinação do número de arestas, vértices e faces de qualquer poliedro convexo e de alguns não convexos. Dessa forma, essa relação permite que os cálculos sejam realizados no intuito de indicar o número de elementos de um poliedro (STEWART, 2015).

A vantagem da relação de Euler, é que, dado um poliedro convexo, na ausência de uma das informações sobre o número de vértices, faces ou arestas, basta utilizar a relação para encontrá-la.

Exemplo: Determine o número de faces de um sólido que apresenta 10 arestas e 6 vertices.

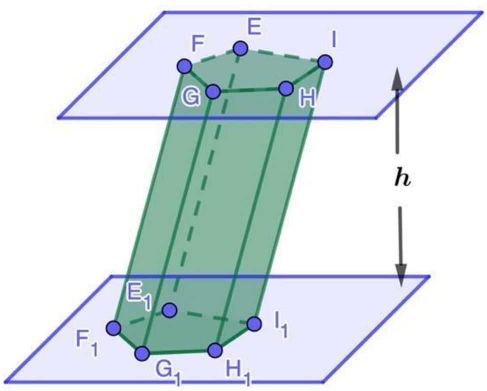
$$V - A + F = 2$$
$$6 - 10 + F =$$
$$2 - 4 + F = 2 \quad F = 4 + 2$$
$$F=6$$

2.5 Prismas

O prisma é um sólido geométrico que é estudado na Geometria Espacial. No nosso cotidiano, encontramos vários objetos que possuem a forma de um prisma. Define-se como prisma um poliedro que possui duas bases formadas por polígonos iguais, e suas áreas laterais são retangulares, conectando os vértices correspondentes de uma base aos da outra. Caracteriza - se por ser um poliedro convexo que apresenta duas bases (polígonos iguais) congruentes e paralelas, cujas faces laterais são paralelogramos. Assim, todo poliedro formado por uma face superior e uma inferior, ambas paralelas e congruentes, ligadas por arestas laterais paralelas, é denominado prisma (SALIN, 2013).

Considerando o prisma da figura 10 a seguir, temos os seguintes elementos:

Figura 10 - Prisma



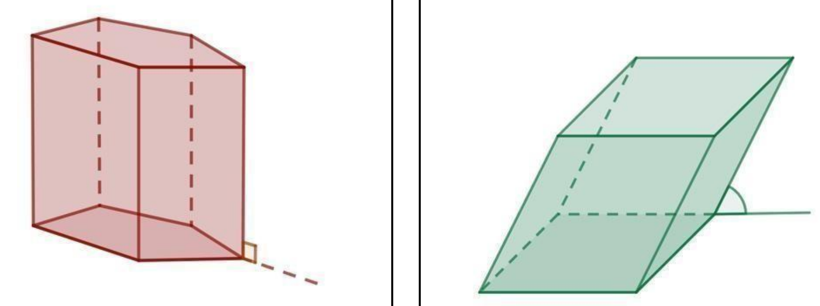
Fonte: Próprio autor (2023)

- ’H’’H’’!’, I’I’!’, ’E’E’’!’;
- Faces laterais: os quadriláteros: FGF! G!,GHG!H!,HIH!I!, IEI!E!, EFE!F!.
- Altura: distância h entres os planos superior e base.

Existem diferentes tipos de prisma, pois como a sua base pode ser qualquer polígono, pode haver prismas de base triangular, quadrangular, pentagonal, hexagonal, entre outros. Alguns prismas quadrangulares recebem nomes especiais de acordo com suas características. Um deles é o paralelepípedo, prisma quadrangular cujas bases são paralelogramos (ou retângulos). VIANA (2015).

Além disso, esse poliedro pode ser classificado como reto ou oblíquo. Quando inclinado, ele é conhecido como prisma oblíquo, caso contrário, é um prisma reto. As caixas, de forma geral, possuem formato de prisma, assim como prédios e outros elementos do cotidiano (SALIN, 2013).

Figura 11 - Prisma reto e oblíquo



Reto: quando as arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases.

Oblíquo: quando as arestas laterais são oblíquas aos planos das bases.

Fonte: Próprio autor (2023)

2.5.1 Área da superfície de um prisma

Para calcular a área total de um prisma, basta somar a área de suas bases e a área lateral. Não existe uma fórmula geral para essa soma, pois o número de faces de um prisma é variável e não existem fórmulas para áreas de polígonos que possuem mais de quatro lados (SALIN, 2013).

- Área lateral ($A_{"}$): é a soma das áreas dos polígonos que forma a lateral do prisma.
- Área da base ($A_{\#}$): corresponde a área do polígono que constitui a sua base.

- Área total ($A_\$$): é a soma de todas as áreas do prisma.

A área de um prisma é calculada a partir da soma entre as áreas das laterais do prisma e o dobro da área de sua base.

2.5.2 Volume de um prisma

O volume de um sólido geométrico representa a quantidade de cubos unitários que cabe no sólido. O que corresponde ao produto entre a área da base e a altura do sólido, isto é:

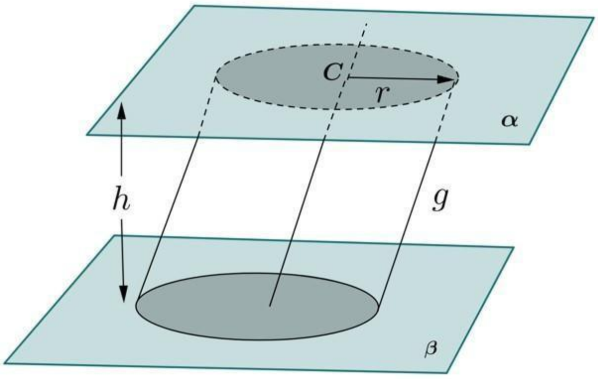
$$\boxed{V = A_{\#}.h}$$

Em que: $A_{\#}$ é área da base e h é a altura do prisma.

2.6 Cilindros

Denomina-se cilindro a reunião de todas as circunferências cujos centros pertencem mesmo segmento de reta compreendido entre dois planos paralelos.

Figura 12 - Cilindro



Fonte: Próprio autor (2023)

Elementos do cilindro:

- Bases: círculo de raio r e centro C.
- Altura: distância h entre os planos.
- Geratriz: qualquer segmento g com uma extremidade em um ponto da circunferência superior e a outra no ponto correspondente na circunferência inferior.

2.6.1 classificação

Um cilindro é reto quando a geratriz g forma um ângulo reto com o plano inferior, caso contrário é um cilindro oblíquo. Um cilindro é dito equilátero, quando sua altura é igual ao diâmetro da base.

Figura 13 - Cilindro reto, oblíquo e equilátero

Fonte: Próprio autor (2023)

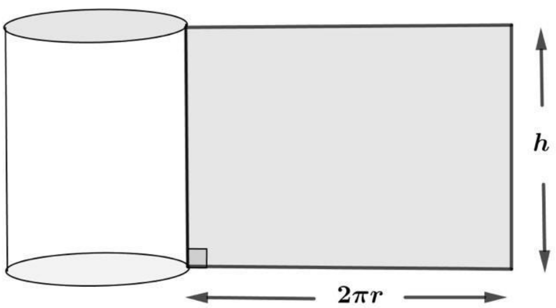
2.6.2 áreas da superfície de um cilindro

A área do cilindro é igual à área ocupada por a superfície do cilindro no espaço tridimensional. Um cilindro é uma figura geométrica tridimensional que possui duas bases circulares paralelas. Sabemos que um cilindro é composto de duas bases circulares e uma superfície que cobre as duas bases (SALIN, 2013).

Note que ao longo de todo o comprimento, ou altura do cilindro, a medida do diâmetro será sempre a mesma. Área da base (Ab): essa figura é formada por duas bases: uma superior e outra inferior; Área total (At): são as áreas das duas bases mais a área lateral.

Área lateral de um cone reto: é equivalente ao retângulo abaixo na figura 14.

Figura 14 - Área lateral de um cilindro



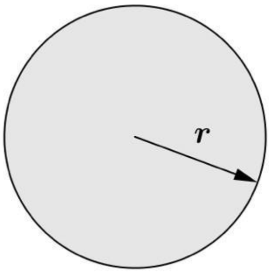
Fonte: Próprio autor (2023)

Neste caso,

$$\boxed{A_l = 2\pi . r . h}$$

Área da base: corresponde a área da circunferência de raio r.

Figura 15 - Área da base do cilindro



Fonte: Próprio autor

$$A_{\#} = \pi . r^2$$

Área total: é a soma de todas as áreas do cilindro (área lateral mais duas vezes a área da base).

$$A_{\%} = A_{"} + 2. A_{\#}$$

2.6.3 volume de um cilindro

$$V = \pi r^{\&} . h$$

O volume de um cilindro é o produto da área da base pela medida da altura.

A forma cilíndrica é bastante comum no dia a dia, vista em latas de refrigerante e cilindros de oxigênio, entre outros objetos. Calcular o volume do cilindro é calcular o espaço que ele ocupa e a sua capacidade, por exemplo, para saber a quantidade de ml que tem na lata de refrigerante.

O cilindro é um objeto bastante comum também em laboratórios para experimentos químicos em que o volume é de grande importância, por exemplo, para calcular a densidade de um objeto, precisamos do seu volume (VIANA, 2015).

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Realizado uma vasta pesquisa bibliográfica de cunho qualitativo, com embasamento teórico de vários autores, que deram suporte ao contexto quanto ao caminho adotado, foi utilizada a ferramenta google acadêmico, usando como descritores basilares cruzados ou isolados em todas as frases de busca, as palavras: ‘modelagem matemática', ‘geometria espacial’, ‘embalagens’.

Para Marconi e Lakatos, (2010) a pesquisa bibliográfica é fundamentada por um levantamento de referências teóricas já analisadas, e publicadas por meios escritos e eletrônicos, como páginas de web sites e artigos publicados, sendo um conjunto de informações precisas e minuciosas que permite a identificação e recuperação da publicação no todo ou em partes.

Segundo Appolinário (2011), os dados da pesquisa qualitativa são coletados nas interações sociais e analisados subjetivamente pelo pesquisador, pois nesta modalidade a preocupação é com o fenômeno.

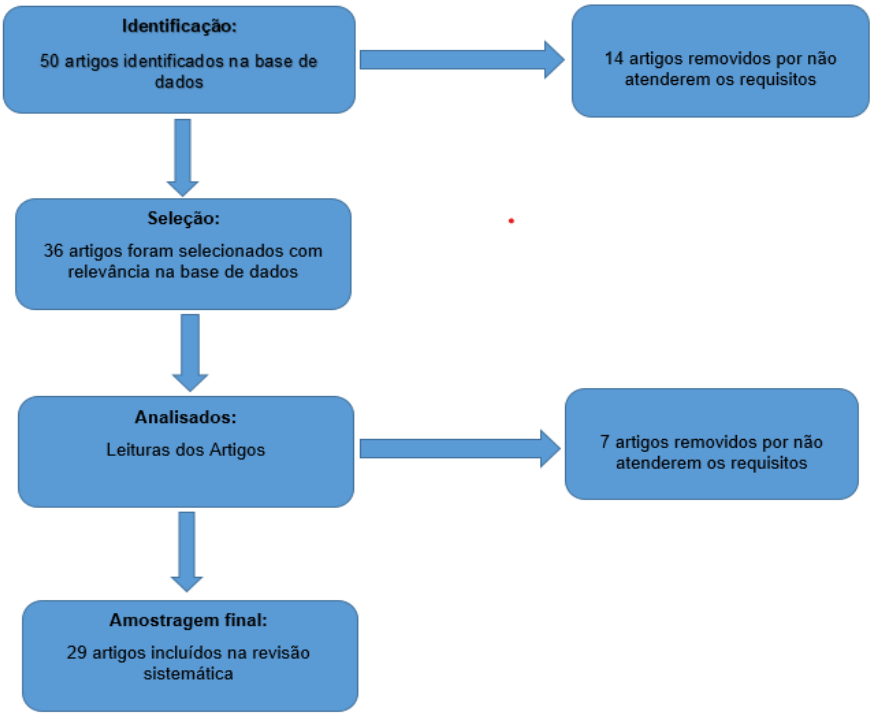
Destarte, foi uma representação normativa de obras consultadas para a elaboração de um texto, artigos e publicações científicas, permitindo o enfoque maior sobre a modelagem matemática e a geometria espacial. A pesquisa quantitativa, também segundo Richardson (2008, p. 70), apresenta-se, “pelo emprego da quantificação, tanto nos tipos de coletas de informações, quanto na análise das mesmas por meio de técnicas estatísticas, variando desde as mais simples às mais complexas”.

Assim, a amostra final deste estudo constitui-se em 29 publicações que foram analisadas na íntegra. Do total de 50 artigos, 14 artigos excluídos por não atenderem aos requisitos da pesquisa, onde apenas 36 foram lidos na íntegra devido ao perfil, observando os parâmetros através da leitura de título e resumo, e desses, totalizando após análise selecionou se apenas 29 que compuseram essa revisão literária.

A pesquisa foi realizada por meio de uma leitura fácil visando a organização das informações selecionadas para que assim pudesse ser encontrada a resposta da problematização.

Esta pesquisa qualifica-se como levantamento bibliográfico, usando fontes de dados documentais, por meio da busca de artigos científicos e outras fontes de pesquisa, dessa forma foi selecionada as referências mais relevantes para o desenvolvimento do trabalho.

Fluxograma 1 - artigos incluídos e excluídos.



Fonte: Próprio autor (2023)

3.1 critérios para seleção de artigos

As buscas foram realizadas em cinco bases de dados bibliográficas — PubMed, Scientific Electronic Library Online (Scielo), nas plataformas PubMed, Scielo e Google Scholar, utilizando artigos publicados.

3.1.1 limite de tempo

Foram selecionados artigos publicados entre 2011 e 2022 (incluindo aqueles disponíveis online em 2009 que poderiam ser publicados em 2011).

3.1.2 idiomas

Há problemas e diferenças nos processos de indexação nas bases de dados bibliográficas; portanto, optou-se pela busca por termos livres, sem o uso de vocabulário controlado (descritores). Com essa estratégia, houve uma recuperação de um número maior de referências, garantindo a detecção da maioria dos trabalhos publicados dentro dos critérios pré estabelecidos.

3.2 critérios de inclusão e exclusão

Foram incluídos todos os artigos originais indexados no período entre 2011 e 2022, com delineamento estudos de corte e estudos antes e depois, realizados para com os 50 artigos, a amostra final deste estudo constitui em 29 publicações, além disso, foi avaliado o desfecho exercício e foi excluído o desfecho efeitos adversos para os artigos. Dos artigos analisados, foram excluídos os textos que não fizeram fechamento com a temática, assim como estudos que durante a leitura na íntegra não traziam informações claras sobre a metodologia, para resposta aos objetivos do presente estudo.

3.3 processo de seleção e de análise dos artigos

O processo de seleção dos artigos em suas diferentes etapas, e o respectivo número de artigos recuperados em cada uma.

As referências captadas foram incluídas em uma biblioteca. A partir dessa biblioteca, foi possível a elaboração de um fluxograma contemplando a quantidade de artigos. Foi construída então uma figura, *Desenvolvimento do conteúdo programático*, na qual cada linha correspondia à análise do fármaco estudado com o desfecho correspondente, e o resultado.

Esta pesquisa qualifica-se como levantamento bibliográfico, usando fontes de dados documentais, por meio da busca de artigos científicos, um conjunto de objetivos claramente pré-definidos com critérios de elegibilidade pré-definidos para estudos;

- Uma metodologia explícita e reprodutível;
- Uma busca sistemática que tenta identificar todos os estudos que atendem aos critérios de elegibilidade;
- Uma apresentação sistemática, e síntese das características e resultados dos estudos incluídos.

3.4 desenvolvimentos do conteúdo programático

O desenvolvimento do conteúdo programático traz os pontos essenciais de acordo com Biembengut e Hein (2023). A modelagem segue alguns procedimentos (etapas), subdivididas em sub etapas. Inicialmente, temos a interação e o reconhecimento da situação-problema, onde a situação a ser estudada é delineada e uma pesquisa é desenvolvida. Em seguida, temos a etapa de matematização, que envolve a formulação e resolução do problema. Essa fase é complexa e desafiante, pois requer a tradução da situação-problema para a linguagem matemática. Por fim, temos a etapa de modelo matemático, interpretação e validação, onde verificamos o nível de aproximação que o modelo tem em relação à situação-problema representada. É importante ressaltar que, durante o processo de matematização, é necessário o desenvolvimento do conteúdo matemático necessário para a formulação, resolução, além da apresentação de exemplos e exercícios análogos, visando aprimorar a compreensão dos conceitos pelo aluno. Descrevendo o procedimento:

3.4.1 interação

O reconhecimento da situação-problema e a familiarização com o assunto são sub etapas que não seguem uma ordem fixa, mas estão interligadas. Nesse momento, é fundamental que o professor demonstre seu conhecimento e interesse pelo conteúdo em questão, pois isso pode ter um impacto significativo na motivação dos alunos. Afinal, o aprendizado é uma escolha individual, onde há liberdade para aprender, ensinar, pesquisar e compartilhar pensamentos, arte e conhecimento (BIEMBENGUT, 2023).

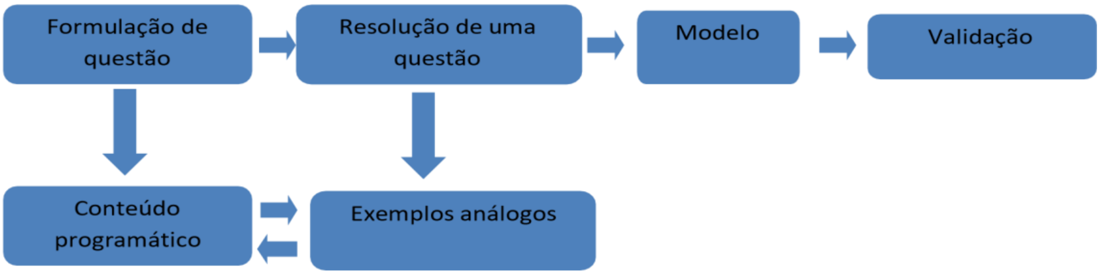
3.4.2 matematização

A hipótese de que é fundamental no processo de modelagem matemática envolve a identificação das constantes envolvidas, a generalização e a seleção de variáveis para descrever as relações em termos matemáticos. O tempo necessário para realizar esse processo depende da abrangência do conteúdo, ou seja, da extensão e complexidade do problema em questão. No entanto, é importante manter a motivação dos alunos ao longo de todo o processo, para que eles se mantenham engajados e interessados (BIEMBENGUT, 2023).

3.4.3 modelos

Com os dados obtidos da realidade através da interpretação da solução e validação do modelo. De acordo com Biembengut e Hein (2023, p. 22), “A questão formulada, que permite a resolução da questão e de outras similares, pode ser considerada um modelo matemático”.

Fluxograma 2 - Desenvolvimento do conteúdo programático segundo as etapas da modelagem



Fonte: Próprio autor (2023)

Encerrando essa etapa do processo, é possível deixar um precedente para uma retomada e uma possível melhoria do modelo. O professor pode propor que os alunos façam projeções e simulações com base no modelo matemático encontrado e comparem os dados com a realidade do problema. É nesse momento, impulsionado pela curiosidade e investigação, que se espera um aluno mais engajado no processo de construção do conhecimento, seja em resposta às suas próprias perguntas ou ao sentido mais significativo atribuído ao conteúdo programático proposto. É nesse ambiente de modelagem matemática, em que situações provenientes de outras áreas da realidade podem estar em sintonia com o conhecimento e as expectativas dos alunos (BIEMBENGUT, 2023).

3.5 pesquisa em campo

Após a pesquisa teórico-bibliográfica, realizou-se uma pesquisa de campo com aplicação em sala de aula, promovendo intervenção pedagógica junto a uma turma do 4º módulo da Educação de Jovens e Adultos (Proeja) do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amapá (IFAP). A metodologia proposta consistiu em uma oficina centrada na abordagem da geometria espacial por meio da Modelagem Matemática, com ênfase no tema das embalagens, apresentando e desenvolvendo conceitos de interação, matematização e modelo matemático, de maneira prática e interativa.

A coleta de dados foi realizada ao longo das atividades de Modelagem Matemática conduzidas com os alunos do 4º módulo da Proeja. O modelo surgiu a partir de uma situação real vivenciada pelos alunos do 4º módulo da Proeja, servindo como ferramenta para a compreensão das teorias matemáticas relacionadas aos cálculos do número de vértices, arestas e faces, além de área e volume na Geometria Espacial.

3.5.1 conceitos e observações de forma e tipos de embalagens

O encontro ocorreu no período noturno, no primeiro semestre de 2023, com autorização de imagem e termo de consentimento para realização da pesquisa. Os alunos foram convidados a pensar nas diferentes embalagens trazidas para a sala de aula.

A primeira etapa foi iniciada com um diálogo sobre a relevância do ensino da geometria espacial, relembrando alguns conceitos que os alunos já conhecem sobre sólidos geométricos e as diversas formas encontradas em nosso cotidiano. Essas formas podem variar desde uma simples lata de óleo (com formato de cilindro) até um grande recipiente como uma caixa d'água (com formato de prisma), por exemplo.

A seguir foram apresentadas aos alunos diversas embalagens com diferentes formas geométricas, como caixas de sapatos, caixas de leite, caixas de pizza, entre outros, variando também em tamanho. O objetivo era que os alunos pudessem reconhecer e distinguir qual sólido geométrico correspondia a cada embalagem.

Durante o diálogo, por meio de questionamentos entre professor e aluno, foi ressaltada a importância de estudar a área das faces laterais e das bases de cada caixa, por exemplo. Essa discussão permitiu que fosse compreendida a importância do conceito no contexto das embalagens e sua relação com as formas geométricas presentes.

Figura 16 - Expondo cada material

Fonte: Próprio autor

Figura 17 - Demonstração das embalagens

3.5.2 trabalhando faces, arestas e vértices

Foi trabalhada a identificação do número de vértices, arestas e faces relacionando o modelo da embalagem com o sólido que a representa. Analisando um prisma, representado aqui pela caixa de pizza, cada "canto" denominado vértice, cada "dobra" da caixa, aresta e cada "lado", face (BIEMBENGUT E HEIN 2013, p.34).

Figura 18 - Exemplo da caixa de pizza

Fonte: Próprio autor (2023)

Os alunos compreenderam o que são faces, arestas e vértices nessa embalagem, apontando corretamente: 16 vértices, 10 faces e 24 arestas. Verificaram ainda, que vale a relação de Euler:

$$V - A + F = 2$$
$$16 - 24 + 10 = 2.$$

Figura 19 - Exemplo da caixa de leite

Os alunos apontaram corretamente: 8 vértices, 6 faces e 12 arestas e se certificaram da relação de Euler:

$$V - A + F = 2$$
$$8 - 12 + 6 = 2.$$

Em caso de possíveis incertezas quanto a conceitos relacionados aos conteúdos, os alunos puderam valer-se do material de apoio para sanar dúvidas. A oportunidade de manipular as embalagens proporcionou um melhor entendimento do conteúdo teórico.

3.5.3 trabalhando áreas e volumes

Foram explanados os conceitos de área, perímetro e volume, explanando os meios de cálculo das grandezas, e a partir da manipulação dessas embalagens houve um melhor entendimento dos alunos em relação às áreas e volumes dos sólidos geométricos envolvidos.

Exemplo da caixa de leite:

Figura 20 – Calculando o volume da caixa de leite

Fonte: Próprio autor (2023)

Após as medições, foram encontrados os seguintes valores: Altura: 17,5cm, largura: 9,5cm e espessura: 6 cm.

Diante dessas informações, os alunos utilizaram a fórmula de volume do prisma que representa essa embalagem e efetuou os seguintes cálculos:

$V = a.b.c = 17{,}5cm \text{ x } 9{,}4cm \text{ x } 6{,}1cm = 1003{,}45\ cm^3$

Como $1cm^3$ equivale a 1ml, isso corresponde ao volume de 1003,45 ml, bem próximo ao que está na caixa, 1000 ml (1 litro).

Exemplo da lata de tinta em spray:

Figura 21 - Calculando o volume de tinta spray

Fonte: Próprio autor (2023)

Após as medições, foram encontrados os seguintes valores: Altura: 14,5m e diâmetro: 5,5cm.

Com base nessas medições, os alunos utilizaram a fórmula de volume do cilindro que representa essa embalagem e efetuou os seguintes cálculos:

$$V = \pi .\ r^{\&} .\ h = 3{,}14 \text{ x } 2{,}75^2 \text{ x } 14{,}5 = 344{,}32\ cm^3$$

Isso equivale ao volume de 344,32ml, bem próximo ao que está na lata, 350 ml.

As questões foram anotadas pelos alunos e serviram como ponto de partida para as pesquisas realizadas, formulação de conjecturas, outros questionamentos que surgiram e a construção de respostas visando às argumentações e demonstrações matemáticas. Pode-se observar o interesse e envolvimento da turma, com relação à pesquisa, e as embalagens como representação das formas geométricas, como exemplo as caixas de leite representando um prisma ou lata de spray que lembra a forma de um cilindro.

A Modelagem Matemática possibilitou aos alunos a oportunidade de vivenciar aulas, com um envolvimento e colaboração de todos na realização de um trabalho investigativo.

4 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DA EXPERIÊNCIA

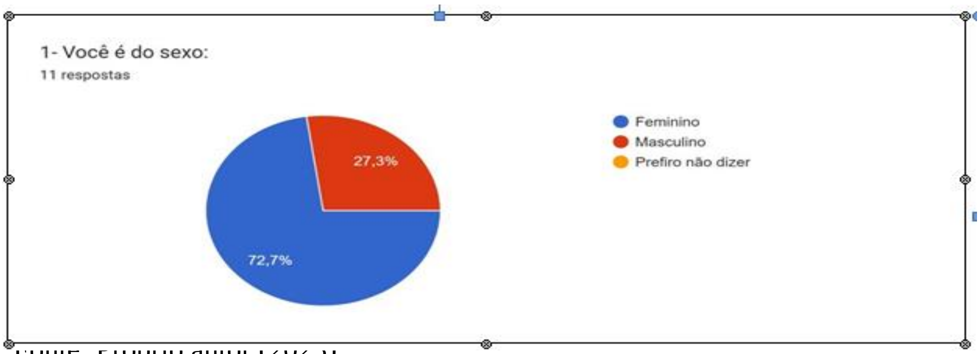
Tendo em vista os desafios do cotidiano enfrentados pelos alunos, os quais resumem muitas vezes as dificuldades na absorção dos conceitos, a presente pesquisa contou com uma pesquisa de intervenção, pois, de acordo com Beltrão e Igliori, (p.17-42, 2010), tal pesquisa favorece a mediação entre a teoria e a prática, assim como propõe alternativas diversificadas baseadas na ação pedagógica capaz transformar a realidade dos discentes.

A pesquisa foi aplicada através do aplicativo Google Formulários compreendendo um total de onze perguntas, em que um total de onze alunos responderam. Apresentamos algumas questões para que refletissem sobre o assunto:

- Você é do sexo feminino ou masculino;
- Você considera matemática uma disciplina;
- Você já tinha ouvido falar em modelagem matemática (busca de modelos matemáticos que ajustam a problema reais);
- Quais Foram os principais aspectos da modelagem matemática que você considera mais claros e fáceis de entender;
- O conteúdo (geometria espacial) ficou mais ou menos interessante, após a intervenção e aplicação da modelagem matemática;
- Você sentiu que a explicação abordou adequadamente os aspectos importantes da modelagem matemática;
- Como você avaliaria a qualidade geral da explicação do conteúdo e a aplicação da modelagem matemática;
- Você achou que aula foi bem-organizada para esse momento;
- O Conhecimento do material foi suficiente para seu conhecimento; Na sua opinião, o que falta nas aulas de Matemática?
- Quais suas principais dificuldades quanto a disciplina de matemática?

4.1 Resultado Da Tabulação Dos Dados Coletados

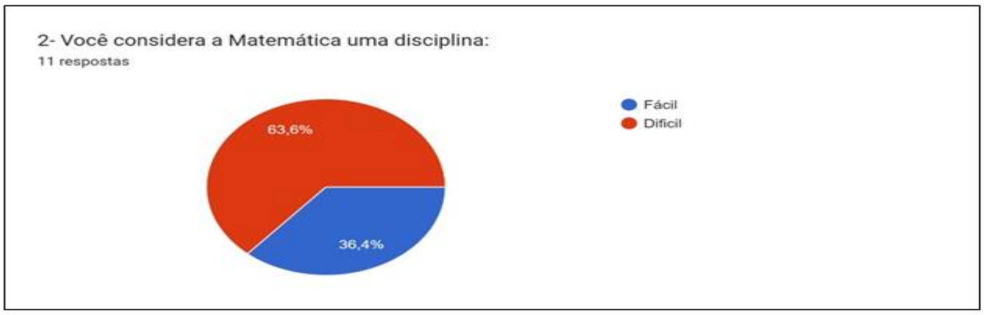
Grafico 1 - Sexo do Participante



Fonte: Próprio autor (2023)

Foram pesquisados o total de 11 alunos, sendo que 72,3% do sexo masculino e 27,7% sendo feminino**.**

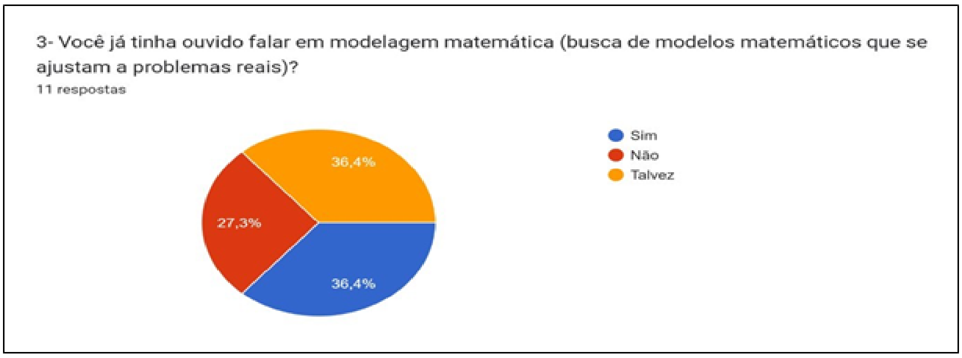
Gráfico 2 - Questuionamento sobre a diciplina matematica



Fonte: Próprio autor (2023)

Na segunda pergunta 36,4% responderam que consideram a matemática uma disciplina fácil e 63,2% difícil.

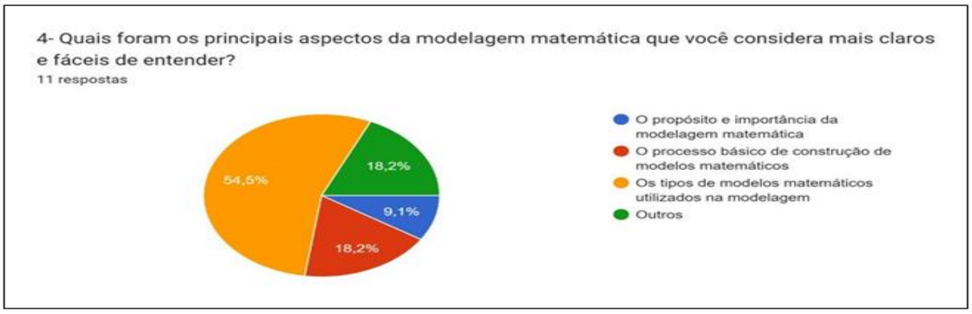
Gráfico 3 - A modelagem



Fonte: Próprio autor (2023)

De acordo com a quantidade de alunos que responderam a pesquisa, 36,4% já tinham ouvido falar em modelagem matemática (busca de modelos matemáticos que ajustam a problema reais), 27,3% não ouviram falar, e 36,3% talvez.

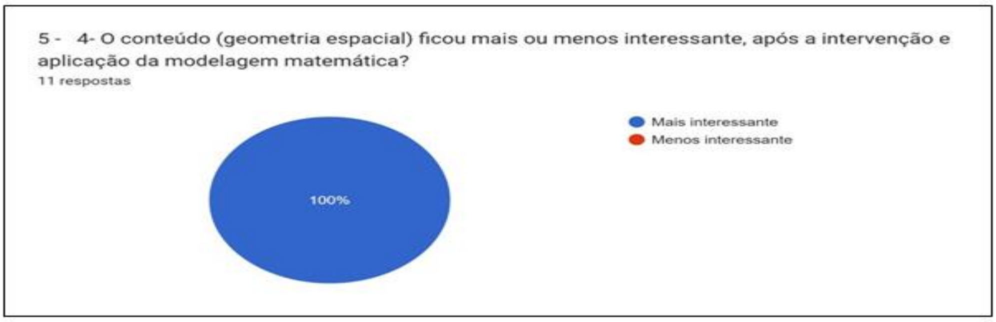
Gráfico 4 - Principais aspectos da modelagem



Fonte: Próprio autor (2023)

Nesta pergunta, 54,5% responderam, os principais aspectos da modelagem matemática que considera mais claros e fáceis de entender é os tipos de modelos matemáticos utilizadas na modelagem, 18,2% responderam que é o processo básico de construção de modelos matemáticos, 9,1% responderam o propósito e importância da modelagem matemática e 18,2% responderam outros.

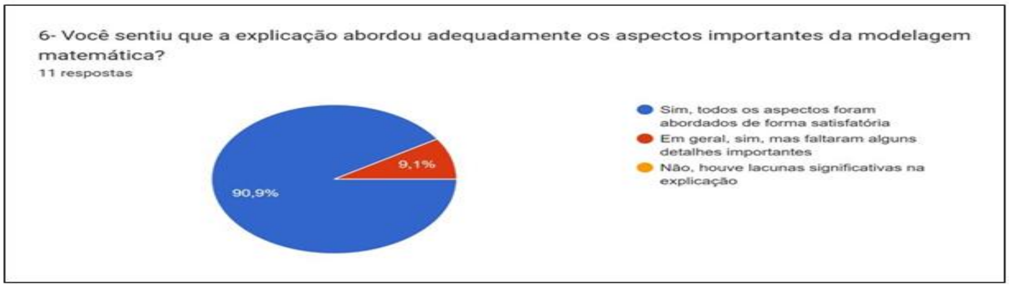
Gráfico 5 - Geometria espacial



Fonte: Próprio autor (2023)

Foram pesquisados o total de 11 alunos, sendo que 100% responderam, que o conteúdo (geometria espacial) ficou mais interessante, após a intervenção e aplicação da modelagem matemática.

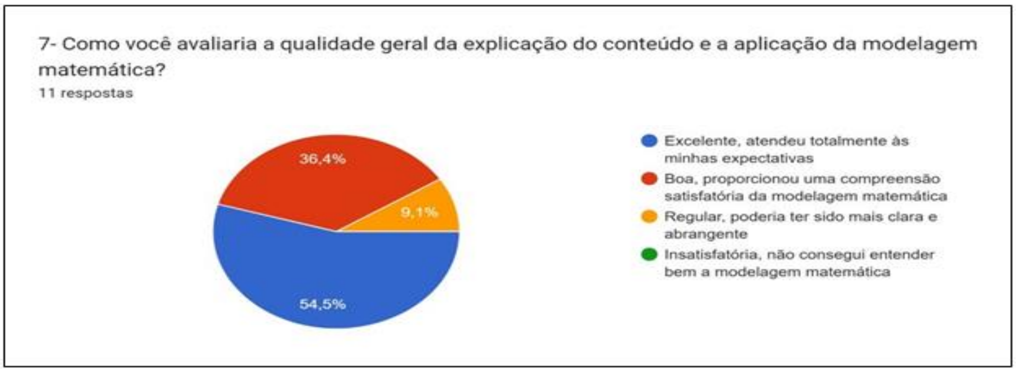
Gráfico 6 - aspectos abordados



Fonte: Próprio autor (2023)

90,9 % responderam que sim, que todos os aspectos foram abordados de forma satisfatória e 9,1% em geral, sim, mas faltaram alguns detalhes importantes. Não houve lacunas significativas na explicação.

Gráfico 7 - Das respostas obtidas



Fonte: Próprio autor (2023)

Das respostas obtidas, 54,5 % responderam que avaliaria a qualidade geral da explicação do conteúdo e a aplicação da modelagem matemática, excelente, atendeu totalmente as minhas expectativas 36,4% Boa, proporcionou uma compreensão satisfatória da modelagem matemática, 9,1% Regular, poderia ter sido mais clara e abrangente.

Gráfico 8: compreensão satisfatória

Fonte: Próprio autor (2023)

Nas perguntas 9 e 10 do questionário, 90,9 % responderam que a aula foi muito bem organizada para o momento, e o conhecimento do material foi o suficiente para o aprendizado.

Gráfico 9 - Perguntas 9 e 10

Fonte: Próprio autor (2023)

No total de 11 alunos pesquisados, 36,4% responderam que, o que falta nas aulas de matemática é interação do professor com aluno, 27,3% responderam trabalhos lúdicos e diferenciados, 27,3% responderam que não falta nada na aula de matemática e 9,1% inovação das aulas.

Gráfico 10 - Principais dificuldades quanto à disciplina de matemática

Foram pesquisados o total de 11 alunos, sendo que 36,4% responderam às principais dificuldades quanto à disciplina de matemática, não gostam dessa disciplina, 18,2% não tem conhecimento, 18,2% não entende o que o professor fala e 27,3 % gosta da disciplina não tem dificuldade.

5 DISCUSSÃO

Durante o desenvolvimento da pesquisa foram estudados diversos artigos cujo tema aborda a Modelagem Matemática e a Geometria espacial com o intuito de alcançar os objetivos propostos neste estudo. Martini e Vicente (2016), após realizarem pesquisas concluíram que é necessário refletir sobre novos métodos de inovação nas aulas de matemática, pois a modelagem proporciona conhecimentos e saberes. Logo, a busca de novos métodos para o ensino de Matemática se torna eficiente quando professores e alunos se mostram empenhados.

Assim, a Modelagem Matemática pode proporcionar uma melhor visão de mundo, por auxiliar no processo de aprendizagem, por meio de um estudo mais contextualizado, motivador e menos abstrato. Faz com que aluno e professor trabalhem e desenvolvam raciocínios lógicos. Através desta o ensino de Geometria Espacial pode auxiliar o educando no desenvolvimento de habilidades de raciocínio e a compreensão da concepção geométrica. Haja vista, pode se adaptar aos conteúdos, tornando a realidade e experiências dos alunos mais significativos, uma vez que proporciona análise, interpretação e tomada de decisões, permitindo que o educando aplique, compreenda, valorize e utilize os conhecimentos sobre a prática (BASSANEZI, 2002).

Diante disso, a Modelagem Matemática deve ser apresentada de forma a abranger todos os procedimentos a serem adotados configurando-se como uma estratégia de metodologia bem eficaz, por fazer com que o aluno entenda a aplicabilidade da Matemática e, conseqüentemente, a Geometria. Esta possibilita um novo paradigma onde buscamos identificar as dificuldades e adaptações dos conceitos matemáticos, cativando a atenção dos educandos em aprender e compreender a Matemática de maneira satisfatória.

A modelagem matemática, como uma abordagem metodológica alternativa, oferece uma maneira criativa, motivada e eficaz de interpretar e compreender uma ampla variedade de características em nosso cotidiano. Quando aplicada ao ensino da geometria espacial, especialmente na confecção e análise de embalagens, ela se destaca como uma ferramenta eficaz no processo de ensino e aprendizagem, pois segundo Bassanezi (2002), é a arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando as soluções na linguagem do mundo real, pode proporcionar diversos benefícios, como por exemplo, motivação, facilitação da aprendizagem, desenvolvimento do aluno como cidadão crítico, compreensão do papel sociocultural da Matemática tornando-a mais importante e agradável, fazendo com que o processo de ensino-aprendizagem não se dê mais no sentido único do professor para o aluno, mas como resultado da interação do aluno com seu ambiente natural.

Nesse sentido, entendemos que a modelagem voltada à geometria espacial pode proporcionar aos discentes, uma oportunidade de aplicação do conteúdo de forma prática e no seu dia a dia, contribuindo assim, para melhoria do seu entendimento e aplicação, dando sentido ao que se ensina e excelentes aplicações a quem entende.

Destarte considera que a inclusão de modelagem, resolução de problemas e aplicações fornecem ao estudante um rico arsenal para entender e interpretar a própria matemática em todas as suas facetas (BRASIL, 2017).

De acordo com Almeida Silva, (2017), a modelagem matemática "é o conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer predições e a tomar decisões". De forma bem mais detalhada, Bassanezi (2015) descreve modelo como um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam o objeto pesquisado, bem como engloba a reflexão de uma porção da realidade, na expectativa de sua compreensão e explicação, por meio dos recursos disponíveis e variáveis selecionadas.

Para Biembengut (2018, p. 12), a modelagem é "o processo que envolve a obtenção de um modelo". E mais: para o ensino da matemática, Biembengut (2018, p. 18) explicita que a modelagem pode ser "um caminho para despertar no aluno o interesse por tópicos matemáticos que ainda desconhece, ao mesmo tempo que aprende a arte de modelar, matematicamente".

Em uma visão mais apurada, Araújo Campos (2015, p. 6) assume que "é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da Matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade". Deste modo, compreende-se que há diversas entradas para modelagem matemática, tanto no âmbito da Matemática Aplicada quanto na Educação Matemática.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Visando os objetivos propostos para esta pesquisa, o referido estudo foi direcionado para a relevância da utilização da modelagem matemática e geometria espacial. Diante desse exposto, percebe-se que a Modelagem Matemática tem a finalidade de promover uma interligação entre a Geometria Espacial e os problemas considerados complexos, considerando o cotidiano dos alunos para ajudar na compreensão, fazendo com que eles desenvolvam um raciocínio lógico e criticidade ao resolver problemas. A proposta de usar a Modelagem Matemática como metodologia de ensino no estudo dos conteúdos de Geometria Espacial, embasados em medição de embalagens, foi positiva na medida em que a questão norteadora deste estudo foi respondida.

Assim sendo, o tema posto neste estudo, apresenta fundamental relevância para o conhecimento e aprendizado, pois, através da leitura buscou-se aperfeiçoar e adquirir novos caminhos e assim com a construção de uma forma clara e objetiva visto que além de agregar conhecimentos na temática, o que nos enriqueceu foi a busca de vários acervos bibliográficos de autores que deram seus posicionamentos, e as referências bibliográficas foram coletadas através de livros, visitas a biblioteca virtuais, bem como consultas a artigos científicos coletados na internet, sendo que a bibliografia utilizada foi suficiente para a pesquisa buscando a compreensão ao evidenciar e analisar.

O estudo atende às necessidades dos leitores, e servirá para abrir um novo campo de estudo, e que servirá de referência para futuros estudos.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P. A. Ação dos signos e o conhecimento dos alunos em atividades de modelagem matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 31, n. 57, p. 19, abr. 2017.

ALMEIDA, L. M. W. **Considerações sobre o uso da matemática em atividades de modelagem**. ZDM, v. 50, n. 1, p. 19–30, 2018.

ALMEIDA, L. M. W. **Estratégias heurísticas como meios de ação em atividades de modelagem matemática**. Com a palavra, o professor, vitória da conquista, 2020. Disponível em: https://cutt.ly/7n8rr4F. Acesso em: 31 maio 2022.

ARAÚJO, J. L.; CAMPOS, I. S. Negotiating the Use of Mathematics in a Mathematical Modelling Project. In: STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Ed.). **Mathematical Modelling in Education Research and Practice:** cultural, social and cognitive influences. NEW YORK: SPRINGER, 2015. p. 283-291.

APPOLINÁRIO, F. **Dicionário de Metodologia Científica**. São Paulo: atlas, 2011. 295 p.

ARAÚJO, J. de L.; ROCHA, A. P.; MARTINS, D. A. **Papel da matemática (ou de modelos matemáticos) em ambientes de modelagem:** a proposta de Rafael. **Rematec**, natal (rn), ano 9, n. 17, p. 5-23, set./dez., 2014.
Disponível em: http://www.rematec.net.br/index.php/inicio/issue/view/18/showToc. Acesso em: 24 jan. 2023.

BARBOSA, J. C. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: reunião anual da anped, 24., 2001, caxambu. **Anais**. rio de janeiro: anped, 2001. 1 cd-rom.

BASSANEZI, R. C. **Modelagem matemática: teoria e prática**. São Paulo: Contexto, 2015.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo: Contexto, 2002. 392 p. ISBN: 8572442073.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. São Paulo: Contexto, 2013.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. ed. São Paulo: Contexto, 2018.

BELTRÃO, M. E. P.; IGLIORI, S. B. C. modelagem matemática e aplicações: abordagens para o ensino de funções. **Educação matemática pesquisa**, São Paulo, v. 12, n. 1, p. 17-42, 2010.

BURAK, D. Modelagem matemática e a sala de aula. In: encontro paranaense de modelagem em educação matemática, 1., 2010, londrina. **Anais**. londrina: uel, 2010. 1 cd-rom.

BRASIL. **Base nacional comum curricular:** educação infantil e ensino fundamental. Brasília: MEC/SEB, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/pdf. Acesso em: 22 fev. 2023.

CALDEIRA, A. D. Modelagem matemática, currículo e formação de professores**:** Obstáculos e Apontamentos. **Educação matemática revista**, São Paulo, n. 46, p. 53-62, set. 2015.

DIAS, C. C.; SAMPAIO, J. C. V.; ROSA, M. B.; BARROS, T. E. **Matemática na pratica geometria espacial**: módulo 2. Cuiabá: central de texto, 2013.

FOUCAULT, M. **A coragem da verdade:** o governo de si e dos outros II. Trad. Eduardo Brandão. São Paulo: Martins Fontes, 2011.

FOUCAULT, M. **A arqueologia do saber.** Trad. Luiz Felipe Baeta Neves. ed. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2014a.

FOUCAULT, M. **A ordem do discurso:** aula inaugural no Collège de France, pronunciada em 2 de dezembro de 1970. Trad. Laura Fraga de Almeida Sampaio. 24. ed. São Paulo: Loyola, 2014b.

FREUDENTHAL, H**. Contos Jovens de Autor Maduro**. São Paulo: Scortecci, 2013.

GALBRAITH, P**. Models of modelling:** genres, purposes or perspectives. journal of mathematical modelling and application, blumenau, v. 1, n. 5, p. 3-16, 2012. disponível em: https://cutt.ly/un8rafy. acesso em: 31 maio 2022.

LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria? educação matemática em revista - **SBEM**, v. 4, 1995.

LUNA, A. V. A.; SOUZA, E. G. **Modelagem matemática nos anos iniciais do ensino fundamental**: práticas e desafios. in: alencar, e. s.; lautenschlager, e. (orgs.). modelagem matemática nos anos iniciais. São Paulo: sucesso, 2014.

MAGNUS, M. C. M. **Modelagem matemática em sala de aula:** principais obstáculos e dificuldades em sua implementação. 2012. 121 p. dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2012.

MARCONI, M. A.; LAKATOS, E. M. **Metodologia científica**. São Paulo: ATLAS, 2010.

MARTINI, R. C.; VICENTE, A. **Modelagem matemática:** uma metodologia para o ensino de geometria na construção de maquetes. Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor PDE. SEM. Paraná, v. 1, 2016.

MEYER, J. F. C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. S. **Modelagem em educação matemática**. Belo horizonte: autêntica, 2011. (coleção tendências em educação matemática).

NEVES, J. R. S. **Poliedros arquimedianos**. 2017. 99 f. dissertação (mestrado em matemática) - universidade federal rural de Pernambuco, recife, 2017.

RICHARDSON, R. J. **Pesquisa social - métodos e técnicas**. 3. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

SANTOS, C. A.; NACARATO, A. M. **Aprendizagem em geometria na educação básica:** a fotografia e a escrita em sala de aula. São Paulo: autêntica, 2014. (coleção tendências em Educação).

SALIN, E. B. Geometria espacial: a aprendizagem através da construção de sólidos geométricos e da resolução de problemas. Florianópolis: **Revemat**, 2013.

SOUZA, R. B**. Modelagem Matemática:** algumas estratégias para o ensino-aprendizagem da matemática na educação básica. 64 p. monografia (especialização em matemática) - instituto federal de educação, ciência e tecnologia de Santa Catarina, 2014.

APÊNDICE A- QUESTIONÁRIO PARA OS PARTICIPANTES

Questionário aplicado aos alunos 4 módulos/Proeja do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amapá-IFAP

1 - Sexo:
(   ) Masculino
(   ) Feminino
(   ) Prefiro não dizer

2 - Você considera matemática uma disciplina:
(   ) Fácil
(   ) difícil

3 - Você já tinha ouvido falar em modelagem matemática (busca de modelos matemáticos que ajustam a problema reais)
(   ) Sim
(   ) Não
(   ) Talvez

4 - Quais Foram os principais aspectos da modelagem matemática que você considera mais claros e fáceis de entender
( ) o proposito é importante da modelagem matemáticos
( ) o processo básico de construção de modelos matemáticos
( ) os tipos de modelos matemáticos utilizados na modelagem ( ) outros

5 - O conteúdo (geometria espacial) ficou mais ou menos interessante, após a intervenção e aplicação da modelagem matemática
( ) mais interessante
( ) menos interessante

6 - Você sentiu a explicação abordou adequadamente os aspectos importantes da modelagem matemático
( ) si, todos os aspectos foram abordados de forma satisfatória
( ) em geral, sim, mas faltaram alguns detalhes importantes
( ) Não, houve lacunas significativas na explicação

7 - Como você avaliaria a qualidade geral da explicação do conteúdo e a aplicação da modelagem matemática
( ) Excelente, atendeu totalmente ás minhas expectativas
( ) Boa proporcionou uma compreensão satisfatória da modelagem matemática
( ) Regular, poderia ter sido mais clara e abrangente
( ) Insatisfatória, não consegui entender bem a modelagem matemática

8 - Você achou que aula foi bem-organizada para esse momento.
( ) Sim
( ) Não

( ) Talvez

9 - Conhecimento do material foi suficiente para seu conhecimento
( ) Sim
( ) Não
( ) Talvez

10 - Na sua opinião, o que falta nas aulas de Matemática?
( ) inovação das aulas
( ) trabalhos lúdicos e diferenciados
( ) interação do professor com alunos
( ) Não falta nada nas aulas de Matemática

11 - Quais suas principais dificuldades quanto a disciplina de matemática
( ) Não tenho conhecimento
( ) não entendo o que o professor fala
( ) não gosto desta disciplina
( ) gosto desta disciplina, não tenho dificuldade