INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO AMAPÁ

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

DINAEL AMARAL FERREIRA

GADI SILVA DOS SANTOS

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO METODOLOGIA PARA O ENSINO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS: uma experiência com alunos do Instituto Federal do Amapá

MACAPÁ - AP

2025

DINAEL AMARAL FERREIRA
GADI SILVA DOS SANTOS

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO METODOLOGIA PARA O ENSINO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS: uma experiência com alunos do Instituto Federal do Amapá

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amapá – IFAP, como requisito avaliativo para obtenção do título de Licenciado em Matemática.
Orientador: Me. Helington Franzotti Araujo de Souza.

MACAPÁ - AP
2025

Biblioteca Institucional - IFAP
Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

F383r Ferreira, Dinael Amaral
A resolução de problemas como metodologia para o ensino de equações diferenciais ordinárias: uma experiência com alunos do Instituto Federal do Amapá - IFAP / Dinael Amaral Ferreira, Gadi Silva dos Santos. - Macapá, 2025.
54 f.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) -- Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amapá, Campus Macapá, Licenciatura em Matemática, 2025.

Orientador: Helington Franzotti Araujo de Souza.

1. Resolução de problemas. 2. Equações diferenciais ordinárias. 3. Ensino de matemática. I. Santos, Gadi Silva dos. I. Souza, Helington Franzotti Araujo de, orient. II. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica do IFAP com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

INAEL AMARAL FERREIRA

GADI SILVA DOS SANTOS

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO METODOLOGIA PARA O ENSINO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS: uma experiência com alunos do Instituto Federal do Amapá

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amapá – IFAP, como requisito avaliativo para obtenção do título de Licenciado em Matemática.
Orientador: Me. Helington Franzotti Araujo de Souza.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
HELINGTON FRANZOTTI ARAUJO DE SOUZA
Data: 31/10/2025 09:56:53-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Me. Helington Franzotti Araujo de Souza (IFAP)

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amapá

Documento assinado digitalmente
CARLOS ALEXANDRE SANTANA OLIVEIRA
Data: 31/10/2025 11:22:45-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Dr. Carlos Alexandre Santana Oliveira (IFAP)

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amapá

Documento assinado digitalmente
FRANCIELCK DOMINGOS FREIRE
Data: 31/10/2025 11:44:11-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Me. Francielck Domingos Freire (IFAP)

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amapá

Apresentado em: 19 / 07 / 2025.

Conceito/Nota: 99

A Deus, em memória de Doriane Guilherme do Amaral e Daniele Amaral Ferreira, mãe e irmã que perdi ao longo da minha trajetória acadêmica. Como eu gostaria de tê-los presentes em minha formatura! Toda a minha admiração ao meu pai, João Antonio Sanches Ferreira, que me deu forças e não mediu esforços para que eu continuasse. Ele é a minha base, onde encontro forças para seguir adiante. Se estou aqui, é graças a eles. (Dinael Amaral Ferreira)

Dedico esse trabalho a Deus e aos meus pais, com imenso esforço me proporcionaram uma educação focada na aquisição de conhecimento. E às minhas queridas filhas, Cássia e Claudia. (Gadi Silva dos Santos).

AGRADECIMENTOS

A Deus e às nossas famílias que não mediram esforços em nos ajudar a ultrapassar os obstáculos que surgiram no decorrer da nossa vida acadêmica.

Nosso profundo agradecimento ao professor Helington Franzotti, por nos orientar com dedicação, amizade e comprometimento, desempenhando sua função com excelência e tornando-se essencial em nossa trajetória.

Expressamos nossa profunda gratidão à professora Veranice Santos por sua dedicação e amizade. Com empenho e comprometimento, ela não mediu esforços para nos apoiar ao longo de todo esse processo, tornando-se essencial para nosso sucesso.

Aos nossos professores do colegiado de Matemática do Instituto Federal do Amapá Câmpus Macapá, pela ajuda e paciência que nos guiaram nesse nosso aprendizado ao longo do curso.

Aos nossos colegas e amigos que conquistamos e compartilharam momentos de descobertas e aprendizado no decorrer deste curso.

A todos que estiveram direta e indiretamente ao nosso lado, que nos momentos difíceis que passamos, estavam ali dando uma palavra de incentivo que nos ajudou em nossa formação.

“A matemática é a rainha das ciências."

(Carl Friedrich Gauss)

RESUMO

Este projeto trouxe como objetivo aplicar a metodologia da Resolução de Problemas como estratégia didática para o ensino de equações diferenciais ordinárias com alunos de Licenciatura em Matemática e Licenciatura em Física do Instituto Federal do Amapá. A Resolução de Problemas é uma abordagem fundamental para o desenvolvimento da habilidade de modelar e resolver problemas matemáticos, que potencializa assim o ensino e aprendizagem da matemática. Muitas vezes, em sala de aula, observa-se um excesso de regras e procedimentos padronizados, que não reforçam o estímulo da criatividade nem a autonomia dos alunos. Nesse contexto, este trabalho buscou contribuir para o ensino das equações diferenciais, explorando a aplicação da teoria da Resolução de Problemas, com enfoque nos quatro passos propostos por George Polya, um dos principais teóricos do tema. Para isso, foi realizada uma pesquisa bibliográfica, coletando informações dos diversos pesquisadores que abordam essa temática e, como aplicação, foi proposta a intervenção de um minicurso com os os alunos do Instituto Federal do Amapá (IFAP) por meio da aplicação da teoria da Resolução de Problemas em duas situações-problema: a queda livre e o Movimento Harmônico Simples, com a modelagem por equações diferenciais ordinárias de primeira e segunda ordens, respectivamente.

Palavras-chave: resolução de problemas; equações diferenciais ordinárias; ensino de matemática.

ABSTRACT

This paper aims to apply the Problem-Solving theory as a teaching strategy for teaching ordinary differential equations to undergraduate students in Mathematics and Physics at the Instituto Federal do Amapá. Problem Solving is a fundamental approach for developing the ability to model and solve mathematical problems, thus enhancing the teaching and learning of mathematics. Often, in the classroom, there is an excess of standardized rules and procedures, which do not enhance the stimulation of creativity or autonomy of students. In this context, this paper seeks to contribute to the teaching of differential equations, exploring the application of the Problem Solving theory, focusing on the four steps proposed by George Polya, one of the main theorists on the subject. For this purpose, bibliographical research was carried out, collecting information from the various researchers who address this topic and, as an application, intervention was proposed in the classroom with the participating subjects through the application of the Problem-Solving theory in two problems: the free fall and Simple Harmonic Motion, with modeling by first and second order ordinary differential equations, respectively.

Keywords: problems solving; ordinary differential equations; mathematics teaching.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A presente pesquisa explora a metodologia da Resolução de Problemas para o ensino de equações diferenciais ordinárias. Nosso estudo se contextualizou na aplicação com alunos do Instituto Federal do Amapá, no campus Macapá. A seguir detalharemos o tema central, a justificativa e os objetivos propostos deste trabalho.

1.1 Apresentação do tema

Esta análise foca na tendência metodológica da Resolução de Problemas, no contexto da Educação Matemática, como metodologia para o ensino de equações diferenciais ordinárias, baseado nos quatros passos de George Polya, autor do livro *A Arte de Resolver Problemas*, de 1945, que concentra as abordagens e indagações sobre como resolver problemas, sempre buscando soluções que sejam eficazes e práticas.

O matemático George Polya, figura central na fundamentação teórica deste trabalho, nasceu na cidade de Budapeste, na Hungria, em 1887. Ele é amplamente conhecido pelo Princípio de Polya, um conceito da teoria das probabilidades desenvolvido por ele. Este princípio oferece uma abordagem para contar objetos combinatórios, tais como arranjos e permutações. Além disso, suas contribuições têm implicações em diversas áreas, incluindo computação, estatística e física. O autor em sua obra tinha como objetivo formar bons estudantes em resolução de problemas, Herebias (2012, p.302).

> George Polya, educador matemático húngaro, em seu livro A arte de resolver problemas, foi o primeiro grande incentivador. Isso aconteceu ainda na primeira metade do século passado. Sua proposta era tornar os estudantes de Matemática bons resolvedores de problemas. Houve avanços e recuos em relação a essa metodologia, mas a sua essência sempre foi mantida, ou seja, ensinar o estudante a resolver problemas é o grande objetivo do ensino da Matemática.

Polya foi reconhecido por sua participação na matemática e para a educação matemática; sua contribuição alcança uma abordagem didática muito utilizada que ainda influencia a forma como a matemática é ensinada e aprendida.

Nesse sentido, tendo sido este trabalho baseado sobretudo na metodologia da Resolução de Problemas, primeiramente foi feito uma referência à seguinte problemática: “O que é um problema?” a partir de então iniciar-se o estudo da Resolução de Problemas como Metodologia para o Ensino de Equações Diferenciais Ordinárias.

1.2 Justificativa

Segundo Dante (2000, p. 30), ensinar os alunos a resolver problemas matemáticos é uma tarefa mais complexa do que transmitir conceitos matemáticos básicos. Ele afirma que não existe um procedimento único para essa abordagem, pois a resolução de problemas exige o desenvolvimento e o aprimoramento de diversas habilidades reflexivas. Esse processo deve ser guiado pelo professor e progressivamente aprimorado pelo aluno.

A falta de familiaridade com as notações formais da matemática e outras representações, como por exemplo os gráficos, pode ser um obstáculo ao aprendizado, tanto pelas dificuldades inerentes aos conteúdos, que muitas vezes são difíceis, quanto pelo desinteresse da parte dos alunos. Nesse sentido, este trabalho se propõe a apresentar um modelo de aplicação da metodologia da Resolução de Problemas aplicada ao ensino de Equações Diferenciais Ordinárias, e enfatizar a importância do uso de estratégias diferenciadas nas aulas de matemática, as quais podem propiciar maior autonomia aos alunos, tornando-os atores ativos no processo de ensino e aprendizagem. Segundo Filho, Laudares e Miranda (2014, p. 324).

> O ensino de Equações Diferenciais Ordinárias vem tendo algumas transformações ao longo das últimas décadas. A forma tradicional de ensino, enfatizando a resolução das EDOs apenas, tem sido articulada com outras estratégias que visam dinâmicas diferentes nos processos de ensino e aprendizagem.

As dificuldades em matemática são variadas e dependem do perfil e das aptidões individuais de cada sujeito. No estudo das equações diferenciais, por exemplo, Filho, Laudares e Miranda (2014, p.331) destacam que, embora os acadêmicos possam apresentar bons resultados, isso não implica necessariamente uma compreensão profunda das equações diferenciais ordinárias. Os autores observam que, mesmo quando os alunos aparentemente chegam a soluções corretas, muitos demonstram dificuldades em expressar e articular suas respostas de maneira consistente com os problemas propostos, especialmente ao lidar com medidas e taxas de variação.

> Considere os detalhes da resolução e procure torná-la tão simples quanto possível; examine as partes mais amplas da resolução e procure abreviá-las; tenta perceber toda resolução num relance. Procure modificar vantajosamente as partes maiores da resolução, melhorá-la toda e inseri-la tão naturalmente quando for possível, nos seus conhecimentos anteriormente adquiridos. Examine o método que o levou à resolução, para caracterizá-lo em outros problemas. (Polya,1945, p.27).

Uma das principais questões complexas em aprender equações é a transição para a linguagem simbólica da matemática, pois muitos alunos têm dificuldade em argumentar os problemas contextualizados para a linguagem matemática o que contribui para que a transição entre situações concretas seja dificultada.

Outra dificuldade pode ser em relação à representação gráfica, em que a ausência dessas habilidades pelos alunos causa dificuldades em interpretar as soluções matemáticas, sobretudo aquelas que envolvam taxas de variação, como é o caso das equações diferenciais como resposta para um problema. Outro aspecto, é no que diz respeito à manipulação algébrica, pois a resolução analítica de uma EDO envolve frequentemente a necessidade de conhecimentos algébricos com as operações de integração e diferenciação, levando alguns alunos a se sentirem inseguros e desmotivados.

Sobre este aspecto, Filho, Laudares e Miranda (2014, p. 331) mencionam que:

> [...] a metodologia predominante usada no ensino de EDOs potencializa o enfoque algébrico (sobre o gráfico e o numérico), com ênfase nos métodos e técnicas de resolução analítica das EDOs, o que pode não ser suficiente para um aprendizado significativo.

Uma possível abordagem que pode contribuir para amenizar tais dificuldades remete à contextualização por meio de situações problemas, utilizando-se destes para possibilitar melhorias no processo de ensino e aprendizagem.

> No geral, presenciamos com certa freqüência uma grande dificuldade na interpretação dos problemas matemáticos, pois normalmente os alunos fazem a leitura e apresentam muitos embaraços para estabelecer relações pertinentes entre o que leram e as estratégias para resolver os problemas. (HEREBIA, 2007, p. 32, 33)

Para Herebia (2007, p. 34), quando raciocinamos nos textos matemáticos acontece imediatamente a lembrança de uma apresentação que tivemos em sala de aula. Essas recordações nos fazem lembrar de como desenvolver as atividades que demandam contextualização, e a partir daí ter estratégias para resolvê-la.

1.3 Objetivo

- Aplicar a metodologia da Resolução de Problemas para o ensino e aprendizagem de Equações Diferenciais Ordinárias com alunos de Licenciatura em Matemática e Física do Instituto Federal do Amapá, campus Macapá.

1.4 Objetivos específicos

- Identificar um problema com base nos quatro passos propostos na metodologia da Resolução de Problemas de George Polya;
- Modelar e resolver um problema de queda livre utilizando uma equação diferencial ordinária de primeira ordem;
- Aplicar uma equação diferencial ordinária de segunda ordem para modelar o movimento harmônico simples.

2 GEORGE POLYA E A TEORIA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A resolução de problemas é fundamental na contribuição para as metodologias de ensino e aprendizagem da matemática. Através desse processo, o estudante é encorajado a desenvolver o seu próprio pensamento crítico, capacitando-o a encontrar soluções de forma independente e a aprimorar as suas habilidades matemáticas. Dessa forma, Polya traz quatro etapas fundamentais que auxiliam o aluno na compreensão do problema apresentado pelo professor. A seguir, um resumo dessas etapas será apresentado no Quadro 1.

Quadro 1- Fases da Resolução de Problemas segundo Polya.

Passos	Descrição
1 - Compreensão do problema	Busca-se compreender o problema com o objetivo de identificar sua incógnita. Nesta fase, serão realizadas todas as coletas de dados necessárias.
2 - Estabelecimento de um plano	Com a compreensão do problema, será definida uma estratégia de resolução, envolvendo os cálculos e as decisões necessárias, com o objetivo de encontrar a incógnita.
3 - Execução do plano	Os planos elaborados serão executados, com atenção às particularidades do problema. Caso surjam contratempos, será necessário retornar à etapa anterior e ajustar a estratégia.
4 - Retrospecto	Após concluir as etapas anteriores, é fundamental realizar uma análise crítica das decisões tomadas para consolidar o conhecimento matemático e avaliar a eficácia dos planos traçados.

Fonte: Os autores, 2025.

2.1 O que é um problema?

De acordo com Lara (2021, p. 14), um dos objetivos da Matemática em si é de fazer o aluno pensar produtivamente, e uma das alternativas é propor a resolução de problemas que possam desafiar e deixá-los motivados a tentarem resolver. Com isso, a Resolução de

Problemas vem se tornando uma ferramenta de fundamental importância no ensino de matemática. Deve-se ressaltar que há uma diferenciação entre “problema” e “situação-problema” que, de acordo com Braga (2020, p. 3) os define da seguinte forma:

> Inicialmente, é interessante destacarmos que consideremos situações-problema e problema como sinônimos. Além disso, cabe enfatizar que, segundo Lorenzato e Vila (1993) e Verçosa, Rocha e Teles (2010), a noção do que é, de fato, um problema é difícil de conceituar do ponto de vista da matemática. O termo problema está constantemente em utilização pelos professores de matemática, mas na maioria das vezes não vem acompanhado de uma reflexão a respeito de sua conceituação. Sua definição vai desde uma visão geral, do senso comum, como sinônimo de dificuldades e aperto, até as especificidades presentes no âmbito da matemática. Até mesmo as pessoas que não estão intimamente ligadas à matemática sugerem que problema seja uma palavra imprescindível do vocabulário, linguagem e vivência do professor de matemática. Muitos até veem a matemática como um dos seus sinônimos por considerá-la algo muito difícil e pouco prazeroso. (BRAGA, 2020, p. 3).

Braga (2020, p. 3), faz uma reflexão do que vem a ser problema, e baseado no ponto de vista da matemática e que segundo Lorenzato (*apud.* Braga, 2020, p.3) a noção de problema é complexa e difícil de definir do ponto de vista matemático, mesmo que haja uma certa frequência da utilização da palavra sendo usada pelos professores e que não existe na maioria das vezes uma reflexão no que diz respeito ao conceito em si do que é problema.

A definição de resolução de problema, no entanto, percorre uma visão geral do pensamento comum, como semelhança de dificuldade e aperto, até às peculiaridades da esfera matemática. Problema é uma palavra imprescindível do vocabulário da matemática, pois faz parte da linguagem e vivência do professor de matemática, para a maioria das pessoas e acabam por olharem a matemática como um dos seus sinônimos por considerá-la difícil e pouco satisfatória.

Para Braga (2020, p. 4) o problema apresentado nos livros didáticos, não deve se limitar apenas em exercícios de forma repetidas e mecânicas, para que o aluno faça a memorização dos conteúdos, visto que alguns professores usam desse recurso para treinar a habilidade matemática apenas, pois existem materiais didáticos que sugerem outro tipo didático no qual traz inovações ao ensino. O que o autor deixa claro em seu artigo é que ele não está condenando uso eventual da didática apresentado anteriormente, pelo ensino tradicional, apenas está explicitando que a Resolução de Problemas está a frente disso.

Ainda segundo o autor, os problemas limitados a exercícios repetitivos, como mencionado anteriormente, servem apenas como uma ferramenta para praticar algoritmos matemáticos específicos. De acordo com Braga (2020, p. 5), essas atividades não promovem uma compreensão mais profunda, mas apenas exercitam a aplicação de técnicas pré-determinadas.

2.2 Problemas no ambiente da sala de aula

Em sala de aula, tendo como base as orientações de George Polya, deve-se seguir em primeiro lugar o objetivo de auxiliar o estudante. Conforme menciona Polya (1945, p. 1) "Um dos mais importantes deveres do professor é o de auxiliar os seus alunos, o que não é fácil, pois exige tempo, prática, dedicação e princípios firmes."

Durante a vida estudantil há a necessidade do auxílio do educador, pois é de suma importância, mesmo sendo um trabalho difícil e que demanda a maior parte do tempo de trabalho do professor, para que possa fazer o planejamento da aula, aplicar metodologias variadas conforme a necessidade e especificidade da turma, sem deixar de trabalhar a independência do aluno, para que este possa evoluir, porém de forma a não os deixar a seu bel prazer, isto é, sozinhos, pois o auxílio do professor se faz necessário para que ocorra a progressão da aprendizagem.

A intervenção docente deve ocorrer de forma equilibrada, pois uma interferência excessiva pode reduzir a autonomia do estudante e limitar o desenvolvimento de suas habilidades. Por outro lado, uma assistência insuficiente pode comprometer o progresso do aluno, dificultando sua aprendizagem e evolução acadêmica.

Sendo assim, o educador deverá, no caso desde aluno demonstrar pouca evolução, deixá-lo ao menos com a ilusão de um trabalho independente, sem parecer que o professor está interferindo diretamente em tudo, mas agindo com naturalidade para que o sujeito possa desenvolver autoconfiança. Conforme corroborado por Polya (1945),

> Ao procurar realmente ajudar o aluno, com discrição e naturalidade, o professor é repetidamente levado a fazer as mesmas perguntas e a indicar os mesmos passos. Assim, em inúmeros problemas, temos de indagar: Qual é a incógnita? podemos variar as palavras e indagar a mesma coisa de muitas maneiras diferentes: Do que é que se precisa? O que que é que se quer? O que é que se deve procurar? (Polya, 1945, p. 1).

Polya ainda faz algumas questões, recomendações e operações mentais, como pode-se observar na citação acima. Segundo ele, a finalidade desses questionamentos é voltar a atenção do aluno para o enigma da averiguação e a sugestão, pois para ele, as tais têm o mesmo objetivo que é provocar a operação mental, onde as indagações do aluno sejam sanadas de forma natural.

O autor organiza as reflexões em agrupamentos temáticos, considerando que tais questionamentos e sugestões são relevantes para promover a discussão com os alunos. Ao longo deste trabalho, esses questionamentos serão apresentados de maneira estruturada, pois são fundamentais para estimular o pensamento crítico e a resolução autônoma de problemas.

Quando o aluno consegue se familiarizar com as listas de sugestões e questionamento, que é direcionada indiretamente, ele percebe a ação sugerida por trás da ação e as operações mentais típicas que são úteis para a resolução de problemas.

Outro objetivo proposto por Polya em sala é a generalidade, que é usada nas reflexões na qual constituem a lista proposta. Tomando indagações como:

- Qual é a incógnita?
- Quais são os dados?
- Qual é a condicionante?

Elas são fundamentais de modo geral, assim usufruir com sucesso ao propor qualquer problema. A sua utilidade não está apenas restrita a um assunto particular. O problema pode ser tanto algébrico quanto geométrico, ou até mesmo um problema não matemático, tais como científico ou uma incógnita. Não há diferença, as indagações nos auxiliam na resolução de qualquer problema. Também deve-se seguir o bom senso no qual tenha que se tomar sugestões e pensar num problema conhecido no qual seria feito de qualquer forma por quem de fato tivesse interesse no problema, e seguir as estratégias que foram citadas, pois todas as indagações e sugestões da lista proposta são naturais, simples, óbvias e de bom senso.

> Há dois objetivos que o professor pode ter em vista ao dirigir a seus alunos uma indagação ou sugestão da lista: primeiro, auxilia-lo a resolver o problema que lhe é apresentado; segundo, desenvolver no estudante a capacidade de resolver futuros problemas por si próprio. (Polya, 1945 p.2).

Para Polya o relacionamento entre professor e aluno deve ser de reprodução de tudo que foi proposto no problema, incentivando-os a ter autonomia e domínio do assunto, de solucionar o que lhe foi apresentado, traçando as duas características que é a generalidade e o bom senso, nas quais por surgirem do bom senso, surgem naturalmente. Essas sugestões apenas indicam a direção geral, deixando a maior parte para o estudante fazer, por serem genéricas. O estudante obtém maior aproveitamento, quando ele consegue assimilar as questões e ser capaz de apresentá-la a si próprio no momento apropriado e realizar, naturalmente e vigorosamente, a operação mental correspondente.

> Ao procurarmos a solução, podemos variar continuamente o nosso ponto de vista, a nossa maneira de encarar o problema. Temos de mudar de posição de quando em quando. É provável que a nossa concepção do problema seja muito incompleta no princípio; a nossa perspectiva é de outra depois de feito algum progresso; ela é ainda mais diferente quando estamos quase a chegar à solução. (Polya, 194, p.3)

Dante (2000, p. 10) também afirma que "É qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos matemáticos para solucioná-la." Segundo o autor, todo pensamento ou desafio matemático desenvolve o despertar do raciocínio lógico do aluno, isso faz com que os educandos pensem produtivamente nas diversas situações problemas. Pois essa é a elegância onde as resoluções de problemas tem se tornado exposto no acúmulo de todas metas essenciais da matemática. (Dante, p. 11).

O autor afirma que ao instruir os educandos a encarar as novas situações, precisa levar em conta as variações sociais e o aperfeiçoamento de cada êxtase e suas habilidades e seus métodos de solucionar os diversos problemas apresentados a eles. Com isso eles passam a solucionar e pôr em prática suas habilidades em todas as questões que surgirem ao longo de sua trajetória em sala de aula. Para ele, as transformações sociais com e a tecnologia impossibilitam as verdadeiras previsões das capacidades dos alunos. (Dante, p. 12).

> As rápidas mudanças sociais e o aprimoramento cada vez maior e mais rápido de tecnologia impedem que se faça uma previsão exata de quais habilidade, conceito e algoritmos matemáticos seriam úteis hoje para preparar um aluno para a vida futura. Ensinar apenas conceitos e algoritmos que atualmente são relevantes parece não ser o caminho, pois ele poderá torna-se obstáculos daqui a vinte anos…(DANTE, 2000. p. 12).

Segundo o autor devemos prover aos educandos métodos para resolver problemas, propondo as diversas técnicas para solucioná-las às grandes situações apresentadas. Esse utensílio ajudará o aluno a argumentar e a solucionar as variedades de problemas apresentados com um ou mais informações assinaladas pelo educador. (Dante, p. 14).

2.3 Divisões principais, questões principais

Ainda na temática dos objetivos em sala, Polya faz uma divisão das questões principais em quatro fases para a solução de problemas, pois deve-se mudar de posição de vez em quando; possivelmente, nossa concepção do problema inicial seja incompleta, e a seguinte já haja maior progresso. Nos tópicos a seguir será feita uma descrição de cada uma dessas fases.

2.3.1 compreensão do problema

"É uma tolice responder a uma pergunta que não tenha sido compreendida. É triste trabalhar para um fim que não se deseja" (Polya, 1945 p. 4). Este questionamento, da incompreensão ocorre algumas ou muitas vezes nas salas de aula, porém o professor deve evitar tais situações, pois o educando necessita compreender o problema, além disso, tem que querer resolver isto. A falta de compreensão e interesse da parte do aluno, nem sempre é culpa do professor, o problema escolhido não tem que ser muito difícil, nem muito fácil, mas natural e interessante. A começar, todo enunciado verbal do problema deve ser bem entendido, para que o aluno possa ter condições de identificar as partes principais dos questionamentos.

2.3.2 estabelecimentos de um plano

Sobre o estabelecimento de um plano, Polya faz a argumentação de que, a partir do conhecimento que se tem, mesmo que de modo geral, de quais são as contas, os cálculos ou os desenhos no qual se precisa fazer a execução é que se pode estabelecer um plano. Portanto, não se pode ter uma ideia sobre determinado assunto, se tivermos pouco conhecimento sobre tal. Essas boas ideias são adquiridas, ou seja, advindas de experiências anteriores. Para que ocorra uma boa ideia não basta apenas se ter a recordação, assim como não se pode ter a ideia sem lembrar-se de alguns fatores congruentes. Com relação a isso Polya afirma que:

> Não basta os materiais para a construção de uma casa, mas não podemos construí-la sem lançar mão dos materiais necessários. Os materiais indispensáveis à resolução de um problema matemático já adquirido, tais como problemas anteriormente resolvidos e teoremas anteriores demonstrados. (Polya,1945 p.6)

A maioria dos problemas estão de uma forma relacionados com que está sendo trabalhado, e aí está a dificuldade, pois este tem alguns pontos em comum e deve-se escolher aquele que é de fato o mais útil, para isso Polya sugere que se vá a um ponto em comum essencial, que é considerar a incógnita e se procure centralizar num problema recorrente que tenha a mesma incógnita ou outra semelhança.

2.3.3 execuções do plano

Polya afirma que ao compreendermos o problema e estabelecer um plano, temos plena condições de executá-lo, para ele não é tão simples conseguir isso, pois precisa de conhecimento pregresso com bons costumes mentais que se concentram em um único objetivo, e mais: boa sorte. Executar o plano é muito mais fácil; paciência é o que mais se precisa. (Polya, 1945, p. 8). Deve-se ficar resolutos de que os por menores inserem-se no roteiro e com isto deve-se examiná-los, um a um minuciosamente até que tudo esclarecido e não haja nenhum tipo de dúvida, ou seja, recanto no qual se possa ter algum erro indetectável.

Quando ocorre de o aluno de fato haver idealizado um plano, o educador terá então um período de quietude. No entanto, a maior preocupação e risco é que o educando esqueça o plano, pois se ele recebeu o plano de fora e através do professor o aceitou, fica mais fácil deste o esquecer. Entretanto, se o plano tiver sido preparado pelo próprio aluno ele não perderá com facilidade a ideia, mesmo que o tenha concebido com alguma ajuda. Dessa forma o ideal é que o seu orientador insista que o aluno averigue cada detalhe.

2.3.4 retrospectos

Depois de concluir as etapas anteriores, Polya afirma que é natural que os alunos ao terminar o problema fechem o livro e mudem para outro, perdendo uma fase muito importante e compreendida da resolução. Portanto, ao fazer o retrospecto do trabalho o aluno pode consolidar evoluindo seus conhecimentos matemáticos, de como chegou ao resultado e os meios no qual chegou a tal, aperfeiçoando a sua capacidade de resolver problemas. O que o professor deve compreender e transmitir a seus alunos é que não existe problema que fique totalmente esgotado, sempre há alguma coisa a fazer e com mais algum estudo aprofundado pode-se fazer a melhoria de qualquer resolução, e sempre é possível aperfeiçoar e ampliar a nossa compreensão do problema.

Neste último estágio, o educando chegou ao seu ponto ideal que é o cumprimento do seu plano, escreveu a resolução verificando cada procedimento, tendo com isso tendo razão para acreditar que solucionou corretamente o seu problema.

> Apesar de tudo, é sempre possível haver erros, especialmente se o argumento for longo e trabalhoso. Daí, a conveniência de verificações. Em particular, se houver algum processo rápido e intuitivo para verificar, o resultado, que o argumento, ele não deverá ser desprezado. É possível o resultado? É possível verificar o argumento? (Polya, 1945, p. 10)

Para o autor acontece sempre que, para se convencer da qualidade de um objeto, ocorre a necessidade de visualização e do toque, para se convencer por duas demonstrações diferentes, assim como se prefere perceber através de dois sentidos. o professor a Priore não deve passar a seus alunos a impressão de que os problemas matemáticos têm pouca relação com os outros, pois surge a ocasião natural de fazer a investigação de um problema quando se faz a retrospectiva de sua resposta, o aluno ao fazer a verificação ele passa a ter conhecimento que suas medidas a serem tomados com relação ao problema foram boas ou não, se ele poderia ter usado um outro caminho mais fácil e eficaz na sua resolução. (Polya, 1945, p. 10)

3 NOÇÕES ELEMENTARES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Definição 3.1 - *Uma equação diferencial ordinária (ou simplesmente EDO) é uma equação que envolve uma função desconhecida e suas derivadas em relação a uma única variável.*

Formalmente, uma equação diferencial ordinária de ordem *n* pode ser expressa da seguinte forma:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{3.1}$$

em que $y = f(x)$ é a função a ser determinada.

Exemplo 3.1 - São exemplos de equações diferenciais ordinárias:

a) A equação $sen(x) \cdot y' - \sec(y) = 5$ é uma equação diferencial ordinária, pois nela está presente a derivada de y, que é denotada como y'.
b) Já a equação $2x^2 - 4x + 7 = 0$, não é uma equação diferencial ordinária, uma vez que não aparecem derivadas em nenhum de seus termos.
c) Analogamente, $\sqrt{\frac{t-1}{\ln(t)}} = 2x \cdot \frac{dx}{dt} - t^2$ é uma equação diferencial ordinária, dado que a derivada de x, denotada como $\frac{dx}{dt}$, está presente.

Definição 3.2 - *A ordem de uma equação diferencial ordinária corresponde a maior ordem entre as derivadas que aparece na equação.*

Exemplo 3.2 - São exemplos de equações diferenciais ordinárias, e suas respectivas ordens:

a) A equação $x^2 \cdot \frac{dy}{dx} - 2y = 2x + 1$ é uma equação diferencial ordinária de 1ª ordem, pois a maior derivada é $\frac{dy}{dx}$, que é de ordem 1.
b) A equação $-y^{(3)} + 2xy^{(5)} + y'' = 0$ é uma EDO de 5ª ordem, uma vez que a maior derivada é de quinta ordem.
c) $sen(t) \cdot y'' + 3y^5 = cos(t^2)$ é uma EDO de 2ª ordem, dado que a maior ordem é, denotada por y''.

Definição 3.3 - *O grau de uma equação diferencial ordinária é dado pelo expoente da derivada de maior ordem da equação.*

Exemplo 3.3 - São exemplos de equações diferenciais ordinárias, com sua ordem e grau, respectivamente:

a) $2x \cdot y^{(10)} - (y^{(9)})^{10} = sen(y)$ é uma equação diferencial ordinária de 10ª ordem e grau 1; isso ocorre porque a derivada de maior ordem, $y^{(10)}$, tem expoente igual a 1.

b) $-5t \cdot (\frac{d^2x}{dt^2})^9 + 9t^{10} = 4 \cdot (\frac{d^3x}{dt^3})^6 + sen(t^{10})$ é uma equação diferencial ordinária de 3ª ordem e grau 6, pois a derivada de maior ordem, $(\frac{d^3x}{dt^3})^6$, tem expoente igual a 6.

c) $8t \cdot (y^{(2)})^{67} + 30t^9 \cdot (y')^{100} = \sqrt[10]{2t^2 - 12}$ é uma equação diferencial ordinária de 2ª ordem e grau 67, porque a derivada de maior ordem está elevada à 67ª potência.

3.1 EDO linear e não-linear

Uma equação diferencial ordinária é chamada **linear** quando pode ser escrita na forma

$$a_n(x) \cdot \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \cdot \frac{d^{(n-1)}y}{dx^{(n-1)}} + \cdots + a_1(x) \cdot \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x). \qquad (3.2)$$

Observe que as equações diferenciais lineares são caracterizadas por duas propriedades:

(i) A variável dependente *y* e todas as suas derivadas possuem grau um, ou seja, a potência de cada termo que envolve *y* é igual a 1;

(ii) Cada coeficiente depende exclusivamente da variável independente *x*.

Observação 3.1 - *Uma equação que não satisfaz as propriedades anteriores, é chamada* ***não-linear****.*

Exemplo 3.4 - São exemplos equações diferenciais ordinárias lineares e não-lineares:

a) A equação diferencial $x^2y'' - sen(x) \cdot y' + y = 0$ é uma EDO linear, pois a variável dependente *y* e todas as suas derivadas possuem grau um, e além disso, cada coeficiente de todos os termos depende exclusivamente da variável independente *x*.

b) $y' + \cos(y) \cdot y^2 = 2x$ é uma equação diferencial ordinária **não-linear** por dois motivos: primeiro, a variável dependente y está elevada ao quadrado, e segundo cada coeficiente não depende exclusivamente da variável independente x, dado que na expressão, aparece o coeficiente $\cos(y)$, e esse por sua vez, apresenta a variável dependente y.

c) $\ln(2x^3 - 5x^2 + 7x + 1) \cdot y'' - arctg(2x^4) \cdot y' - y = sen(x^2 - 1)$ é uma equação diferencial ordinária linear, pois a variável dependente y e todas as suas derivadas possuem grau um, e cada coeficiente depende exclusivamente da variável independente x.

Definição 3.4 - *Uma equação diferencial ordinária (EDO) homogênea é aquela em que todos os termos podem ser expressos como funções da variável dependente e suas derivadas sem termos independentes*[1].

Em termos matemáticos, uma EDO de ordem n é homogênea quando escrita na forma:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \tag{3.3}$$

Onde F é uma função que depende de y (a função a ser determinada) e de suas derivadas até a ordem n.

Um exemplo é a equação:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{3.4}$$

Aqui não há termos independentes (como uma constante ou uma função de x isolada), caracterizando a homogeneidade da EDO.

Definição 3.5 - *Uma EDO é não homogênea se contém termos que não dependem da função desconhecida y ou suas derivadas.*

Esses termos independentes podem ser constantes ou funções de x. A forma geral de uma EDO não homogênea de ordem n é:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = g(x) \tag{3.5}$$

onde $g(x)$ é uma função de x não nula.

A seguir temos um exemplo de EDO não homogênea de segunda ordem.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x), \quad g(x) \neq 0. \tag{3.6}$$

[1] Denominamos de independentes os termos que não dependem da variável y (ou sua derivada y', y'', etc.). Ou seja, são funções que dependem apenas da variável independente x ou são constantes.

Assim, a principal diferença entre EDO homogênea e não homogênea é a presença ou ausência de termos independentes não nulos na equação.

3.2 Métodos de resolução de EDOs separáveis e lineares de 1ª ordem

Neste tópico, abordaremos a resolução de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem por um método analítico. Há várias técnicas para encontrar a solução analítica de uma equação diferencial, o que chamamos geralmente de "resolver a EDO". Cada técnica poderá ser aplicada em equações diferenciais específicas, dependendo da sua ordem e classificação em lineares e não lineares. Qualquer função f definida em algum intervalo *I*, que, quando substituída na equação diferencial reduz a equação a uma identidade, é chamada de **solução para a equação no intervalo *I*.**

3.3 Equações diferenciais ordinárias separáveis de primeira ordem

Definição 3.3.1- *Uma equação diferencial da forma*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \text{ }, h(y) \neq 0 \tag{3.7}$$

é chamada separável ou diz-se que ela tem variáveis separáveis.

Observe que uma equação separável (3.7) pode ser escrita como

$$h(y) \cdot \frac{dy}{dx} = g(x). \tag{3.8}$$

E, se $y = f(x)$ denota uma solução para (3.8), então temos:

$$h\big(f(x)\big) \cdot f'(x) = g(x)$$

Logo, integrando a equação membro a membro em relação a variável *x*, resulta em:

$$\int h\big(f(x)\big) \cdot f'(x)\, dx = \int g(x)\, dx. \tag{3.9}$$

Mas, note que $dy = f'(x)dx$, assim a equação (3.9) pode ser reescrita como

$$\int h(y)\, dy = \int g(x)\, dx \tag{3.10}$$

e, portanto, conclui-se que uma EDO separável pode ser resolvida pelo método de integração.

Exemplo 3.5 - Analisando a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = ky, k \in R,$$

podemos separar as variáveis, e assim, temos:

$$\frac{dy}{y} = kdx \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int k\, dx \quad \Rightarrow \ln|y| = kx + c,\ c \in R$$

$$e^{\ln|y|} = e^{kx+c} \Rightarrow y = e^{kx} \cdot e^{c}.$$

Como e^c é um valor constante, podemos escrevê-lo simplesmente como C. Daí, segue que $y = ce^{kx}$ é a solução da equação diferencial.

Exemplo 3.6 - Dada a EDO $2y \cdot \frac{dy}{dx} = 4x^3 - x$, podemos separar as variáveis e aplicar a integração membro a membro, conforme a solução a seguir.

Solução:

$$2ydy = (4x^3 - x)dx \;\Rightarrow\; \int 2y\,dy = \int\left(4x^3 - x\right)dx \;\Rightarrow$$

$$y^2 = x^4 - \frac{x^2}{2} + c.$$

Exemplo 3.7 - Determine a solução da equação diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{1+x^2}$

Solução:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{1+x^2} \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{x}{1+x^2}dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{x}{1+x^2}dx \;\Rightarrow\; \ln|y| = \frac{\ln|1+x^2|}{2} + c \;\Rightarrow$$

$$\ln|y| = \ln\left|\sqrt{1+x^2}\right| + \ln|c| \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \ln\left|c \cdot \sqrt{1+x^2}\right| \quad \Rightarrow \quad y = c \cdot \sqrt{1+x^2}.$$

3.4 Equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem

Definição 3.4 - *Uma equação diferencial da forma*

$$a_1(x) \cdot \frac{dy}{dx} + a_0(x) \cdot y = g(x) \tag{3.11}$$

é chamada de equação linear de primeira ordem.

Dividindo a equação pelo coeficiente $a_1(x)$, obtemos uma forma mais simplificada para a equação linear:

$$\frac{dy}{dx} + P(x) \cdot y = Q(x), \tag{3.12}$$

onde $P(x)$ e $Q(x)$ são funções dadas, que devem ser contínuas e definidas em um mesmo intervalo I. Observe que nesta equação

$$P(x) = \frac{a_0}{a_1} \quad \text{e} \quad Q(x) = \frac{g(x)}{a_1}.$$

Primeiramente, a equação (3.12) não é separável, pois não é possível isolar as variáveis em cada lado da igualdade diretamente. No entanto, pode-se aplicar um método que consiste em multiplicar a equação por uma função auxiliar, chamada **fator integrante**, com o objetivo de transformar a equação diferencial mais simples de forma que facilite encontrar uma solução. A ideia é encontrar uma função $u(x)$ de modo que, ao multiplicarmos a equação original por essa função, o primeiro membro se torne a derivada de um produto. Desse modo, tomando a equação (3.12) e multiplicando os seus membros por $u(x)$, dispomos de

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot u(x) + u(x) \cdot P(x) \cdot y = u(x) \cdot Q(x). \tag{3.13}$$

Precisamos que o lado esquerdo da equação (3.13) seja a derivada de um produto, e nesse intuito, ao escolhermos $\frac{du}{dx} = u(x) \cdot P(x)$, podemos descobrir o fator integrante $u(x)$ utilizando apenas o método da separação das variáveis, conforme a seguir:

$$\frac{du}{dx} = u(x) \cdot P(x) \;\Rightarrow\; \frac{du}{u(x)} = P(x)dx \;\Rightarrow\; \int \frac{du}{u(x)} = \int P(x)\,dx \;\Rightarrow\; \ln|u(x)| = \int P(x)\,dx.$$

Aplicando a exponencial de base e em ambos os lados da igualdade, temos:

$$e^{\ln|u(x)|} = e^{\int P(x)dx} \;\Rightarrow\; u(x) = e^{\int P(x)dx}.$$

Logo, o fator integrante é $u(x) = e^{\int P(x)dx}$ e, desse modo, a equação (3.13) se torna:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot u(x) + \left(\frac{du}{dx}\right) \cdot y = u(x) \cdot Q(x). \tag{3.14}$$

Como o primeiro membro da equação (3.14) é exatamente a derivada de um produto, podemos escrever:

$$\frac{d}{dx}[y \cdot u(x)] = u(x) \cdot Q(x). \tag{3.15}$$

Perceba que a EDO linear transformou-se em uma equação de variáveis separáveis e, portanto, pode-se agora aplicar o método da integração para resolvê-la:

$$\int d[y \cdot u(x)] = \int u(x) \cdot Q(x)\,dx \qquad \Rightarrow \qquad y \cdot u(x) = \int u(x) \cdot Q(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{u(x)} \cdot \int u(x) \cdot Q(x)\,dx. \tag{3.16}$$

Exemplo 3.8 - Dada a equação $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = 2x^3 + 3x$, determine a solução geral.

Solução:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = 2x^3 + 3x, \text{ note que } P(x) = \frac{1}{x}, Q(x) = 2x^3 + 3x.$$

Usando o fator integrante $u(x) = e^{\int \frac{1}{x}dx} \Rightarrow u(x) = e^{\ln|x|} \Rightarrow u(x) = x.$

$$y = \frac{1}{x} \cdot \int x \cdot (2x^3 + 3x)\, dx \ \Rightarrow \ y = \frac{1}{x} \cdot \int 2x^4 + 3x^2\, dx \ \Rightarrow \ y = \frac{1}{x} \cdot \left[\frac{2x^5}{5} + x^3 + c\right] \Rightarrow$$

$$y = \frac{2x^4}{5} + x^2 + \frac{c}{x}.$$

Exemplo 3.9 - Determine a solução geral da EDO

$$2x \cdot \frac{dy}{dx} - x^3 y = 4x \cdot e^{\frac{x^3}{6}}.$$

Solução:

$$2x \cdot \frac{dy}{dx} - x^3 y = 4x \cdot e^{\frac{x^3}{6}}$$

Note que a equação acima não está na forma da equação (3.12); portanto, iremos transformá-la para o formato de uma EDO linear. Para isso, basta dividi-la por $2x$:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{x^3}{2x} \cdot y = \frac{4x \cdot e^{\frac{x^3}{6}}}{2x} \ \Rightarrow \ \frac{dy}{dx} - \frac{x^2}{2} \cdot y = 2 \cdot e^{\frac{x^3}{6}},$$

e nesses termos, $P(x) = -\frac{x^2}{2}$ e $Q(x) = 2 \cdot e^{\frac{x^3}{6}}$.

Usando o fator integrante $u(x) = e^{\int -\frac{x^2}{2} dx} \ \Rightarrow \ u(x) = e^{-\frac{x^3}{6}}$. Logo,

$$y = \frac{1}{e^{-\frac{x^3}{6}}} \cdot \int e^{-\frac{x^3}{6}} \cdot 2 \cdot e^{\frac{x^3}{6}}\, dx \Rightarrow \ y = \frac{1}{e^{-\frac{x^3}{6}}} \cdot \int 2 \cdot e^{\frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{6}}\, dx \ \Rightarrow \ y = 2 \cdot e^{\frac{x^3}{6}} \cdot \int e^0\, dx \Rightarrow$$

$$y = 2 \cdot e^{\frac{x^3}{6}} \cdot \int 1\, dx \ \Rightarrow \ y = 2 \cdot e^{\frac{x^3}{6}} \cdot (x + c) \ \Rightarrow \ y = 2x \cdot e^{\frac{x^3}{6}} + c \cdot e^{\frac{x^3}{6}}.$$

3.5 Equações diferenciais ordinárias lineares de 2ª ordem

Definição 3.5 - *Uma EDO linear de 2ª ordem é uma equação diferencial do tipo*

$$P(x) \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + Q(x) \cdot \frac{dy}{dx} + R(x) \cdot y = f(x) \tag{3.17}$$

em que $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ e $f(x)$ são funções contínuas em um intervalo aberto I.

Para iniciarmos a análise, comecemos considerando uma equação linear homogênea com coeficientes constantes da seguinte forma:

$$a \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + b \cdot \frac{dy}{dx} + c \cdot y = 0, \quad \text{com } a, b, c \in R. \tag{3.18}$$

Para determinar a solução geral, precisamos encontrar duas soluções linearmente independentes. Caso as soluções sejam linearmente dependentes, elas se tornarão redundantes, não fornecendo a diversidade necessária para a solução geral. Assim, a solução geral será dada pela combinação linear dessas duas soluções linearmente independentes.

Inicialmente, procura-se uma solução da forma $y = e^{\lambda x}$ em que λ é uma constante a ser determinada.

Partindo de $\frac{d}{dx}\left[e^{\lambda x}\right] = \lambda \cdot e^{\lambda x}$ e $\frac{d^2}{dx^2}\left[e^{\lambda x}\right] = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x}$, e substituindo esses valores na equação diferencial (3.18), obtém-se:

$$a\lambda^2 \cdot e^{\lambda x} + b\lambda \cdot e^{\lambda x} + c \cdot e^{\lambda x} = 0.$$

Como $e^{\lambda x}$ é sempre diferente de zero, chega-se à equação algébrica de segundo grau

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0. \tag{3.19}$$

Que é chamada ***equação característica*** da equação linear homogênea de 2ª ordem com coeficientes constantes.

Como estamos perante uma equação algébrica do segundo grau, é natural estudar os diferentes casos com respeito às suas raízes, que designamos por λ_1 e λ_2.

1º Caso - Raízes reais e distintas: Se λ_1 e λ_2 forem reais e distintas, ou seja $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então a solução geral da equação diferencial linear homogênea de segunda ordem, com coeficientes constantes, é dada por

$$y = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}, \text{ com } A, B \text{ constantes reais.} \tag{3.20}$$

Exemplo 3.10 - Encontre a solução geral da equação diferencial $y'' - 64\, y = 0$.

Solução: Determinando a equação característica, resulta em:

$$\lambda^2 - 64 = 0$$

Calculando as suas raízes, temos:

$$\lambda = \pm\sqrt{64} \Rightarrow \lambda = \pm 8.$$

Portanto, $\lambda_1 = -8$ ou $\lambda_2 = 8$. Logo, a solução geral da EDO é $y = Ae^{-8x} + Be^{8x}$.

2º Caso - Raízes reais e iguais: Se a equação característica tiver duas raízes reais e iguais $\lambda_1 = \lambda_2$, então a solução geral da equação homogênea será dada por

$$y = Ae^{\lambda_1 x} + Bxe^{\lambda_1 x} \Rightarrow y = e^{\lambda_1 x} \cdot (A + Bx) \tag{3.21}$$

Exemplo 3.11 - Determinar a solução geral da equação diferencial $4y'' + 4y' + y = 0$.

Solução: Observamos que a equação característica dessa equação é

$$4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0$$

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1$$

$$\Delta = 16 - 16 = 0$$

$$\lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 4} \Rightarrow \lambda = \frac{-4}{8} = \frac{-1}{2}.$$

Daí, segue que a solução geral da equação diferencial é

$$y = e^{-\frac{1}{2}x} \cdot (A + Bx).$$

3º Caso - Raízes complexas: Suponhamos que a equação característica da equação diferencial possua duas raízes complexas $\lambda = \alpha \pm \beta i$. Nesse caso, a sua solução é dada por

$$y = e^{\alpha x} \cdot [A \cdot \cos(\beta x) + B \cdot sen(\beta x)]. \tag{3.22}$$

Exemplo 3.12 - Determine a solução geral da equação $y'' - 4y' + 5y = 0$.

Solução:

A sua equação característica é $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$.

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5$$

$$\Delta = 16 - 20 = -4$$

$$\lambda = \frac{-(-4) \pm \sqrt{-4}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \lambda = \frac{4 \pm \sqrt{(-1) \cdot 4}}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{4 \pm \sqrt{4} \cdot \sqrt{(-1)}}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{4 \pm 2 \cdot \sqrt{(-1)}}{2}$$

$\Rightarrow \lambda = 2 \pm \sqrt{(-1)}$, com $\sqrt{(-1)} = i$, temos $\lambda = 2 \pm i$.

Daí, a sua solução geral é da forma $y = e^{2x} \cdot [A \cdot \cos(x) + B \cdot sen(x)]$.

3.6 Problema do valor inicial ou PVI

Quando buscamos determinar uma solução específica para uma equação diferencial, passando por um ponto predefinido, nos deparamos com o que chamamos de Problema de Valor Inicial (PVI).

Nesse contexto, a condição inicial desempenha um papel crucial. Ela nos permite fixar um valor específico para a constante ***C*** presente na solução geral da equação, em outras palavras, a condição inicial é o elo que conecta a teoria das EDOs à realidade, permitindo-nos encontrar uma solução única que satisfaça tanto a equação quanto o ponto inicial especificado pelo problema em questão. Usando o exemplo 3.7, suponha que a EDO seja acoplada à seguinte condição inicial: $y(3) = \sqrt{10}$.

Aplicando esta condição inicial dada para resolver o PVI, temos:

$$y(3) = c \cdot \sqrt{1 + 3^2} \Rightarrow \sqrt{10} = c \cdot \sqrt{10} \Rightarrow c = 1.$$

Portanto, a solução específica no ponto (3, $\sqrt{10}$) é $y = \sqrt{1 + x^2}$.

O Problema de Valor Inicial (PVI) é essencial nas Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs), porque possibilita a definição de soluções únicas por meio da aplicação de métodos de resolução. Além disso, o PVI é fundamental para compreender o comportamento dinâmico de sistemas em diversas áreas do conhecimento. Ele desempenha um papel crucial na modelagem e análise de fenômenos reais, tornando-se um instrumento indispensável na abordagem das EDOs. Vale ressaltar que neste trabalho os problemas propostos para aplicação da Resolução de Problemas serão acoplados a condições iniciais, para que os sujeitos participantes possam modelar e determinar as soluções particulares.

4 METODOLOGIA

O procedimento metodológico desta pesquisa foi de natureza bibliográfica e envolveu a realização de um levantamento do referencial teórico em livros, revistas, artigos científicos, entre outros, por meio do qual o tema foi sendo gradualmente consolidado. Segundo Marconi e Lakatos (2003, p. 183), o objetivo da pesquisa bibliográfica é do pesquisador familiarizar-se com tudo o que já foi escrito e publicado sobre o tema.

A pesquisa também foi exploratória onde foram aplicados dois exemplos de equação diferencial ordinária de primeira e segunda ordem com os alunos do Instituto Federal do Amapá, nos cursos de Licenciatura em Matemática e Licenciatura em Física. Na perspectiva de Marconi e Lakatos (2003), as pesquisas exploratórias:

> São investigações de pesquisa empírica cujo objetivo é a formulação de questões ou de um problema, com tripla finalidade: desenvolver hipóteses, aumentar a familiaridade do pesquisador com um ambiente, fato ou fenômeno, para a realização de uma pesquisa futura mais precisa ou modificar e clarificar conceitos. (MARCONI e LAKATOS, 2003, p. 188).

Foi conduzida uma pesquisa quanti-qualitativa com os alunos, visando analisar os dados com base nos problemas apresentados. Essa abordagem facilitou uma compreensão mais aprofundada do processo de resolução de problemas, contribuindo para a identificação de estratégias eficazes de aprendizagem. Conforme Creswell (2023), pesquisa quanti-qualitativa:

> [...] necessidade de esclarecer o objetivo de reunir dados quantitativos e qualitativos em um único estudo (ou a um programa de estudo).
> [...] Como a pesquisa de métodos mistos é relativamente nova nas ciências sociais e humanas como uma técnica distinta de pesquisa, é útil informar, em uma proposta, uma definição básica e uma descrição da técnica. Ademais, quando isso é definido, nos projetos de pesquisas, saberá que pode se usufruir dos dois métodos o quanti e o quali para se construir a resposta à problemática desde o início de qualquer pesquisa. (Creswell , 2023, p. 17).

4.1 Lócus da pesquisa

Este trabalho foi realizado no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amapá - Ifap, no campus Macapá, que está localizado na Rodovia BR 210 KM 3, s/n, bairro Brasil Novo, CEP 68.909-398, na cidade Macapá, no estado do Amapá. A instituição oferece um ensino de qualidade à comunidade, buscando a excelência acadêmica e a inclusão social com cursos nos níveis técnico, tecnológico, graduação e pós-graduação, além de cursos FIC.[2]

O câmpus Macapá do IFAP tem uma infraestrutura moderna com amplas salas de aula com recursos de multimídia, propiciando um ambiente adequado para o ensino e a aprendizagem. Há laboratórios especializados e bem equipados para as aulas práticas, biblioteca, área de convivência destinada ao lazer e à interação social dos alunos.

O Instituto Federal do Amapá (IFAP) teve seu início em 25 de outubro de 2007, com a criação da Escola Técnica Federal do Amapá (ETFAP**)**, instituída pela Lei nº 11.534. Pouco depois, em 13 de novembro de 2007, a Portaria MEC nº 1066 encarregou o Centro Federal de Educação Tecnológica do Pará (CEFET/PA) de implantar a ETFAP. Para coordenar e viabilizar essa implantação, a Portaria MEC nº 1199, de 12 de dezembro de 2007, nomeou o professor Emanuel Alves de Moura como Diretor - Geral *Pro Tempore*.

Figura 1 - Instituto Federal do Amapá

Fonte: Acervo do IFAP

4.1 Sujeitos participantes

A pesquisa ocorreu com alunos do curso de Licenciatura em Física e Licenciatura em Matemática do Ifap, câmpus Macapá.

[2] Cursos de Formação Inicial e Continuada.

4.3 Procedimentos metodológicos

O procedimento proposto pelos pesquisadores foi a aplicação de um minicurso conduzido no laboratório de Matemática do Ifap, no dia 4 de abril de 2025, em duas sessões distintas: uma matutina (das 09h00m às 12h00m) e outra no turno vespertino (das 14h00m às 17h00m).

A pesquisa envolveu a participação de uma amostra composta por 8 (oito) alunos de nível superior, especificamente 6 (seis) graduandos em Licenciatura em Matemática e 2 (dois) graduandos em Licenciatura em Física. Os participantes responderam a dois questionários, um no início e outro ao final da aula. Adicionalmente, conforme proposto pela equipe de pesquisa, cada participante resolveu individualmente dois problemas matemáticos, envolvendo a abordagem tema deste trabalho. Na Figura 2 tem-se o registro da aplicação do minicurso para os participantes.

Figura 2 - Imagem da aplicação do minicurso.

Fonte: Os autores, 2025

O minicurso iniciou no horário marcado às 09h00m no laboratório de Matemática do Ifap campus Macapá com 6 (seis) alunos de nível superior, sendo 5 (cinco) de Licenciatura em Matemática e 1 (um) de Licenciatura em Física. Previamente ao conteúdo programático, os participantes preencheram o questionário de abertura.

A abordagem teórica e aplicação de exercícios de assimilação, fixação e aprofundamento, sucedeu aos participantes os conceitos da Teoria da Resolução de Problemas que contemplam os quatros passos propostos por Polya para resolver um problema.

A partir disso, iniciou-se a exploração das situações-problema previstas nos objetivos deste trabalho, com o intuito de aplicar a Teoria da Resolução de Problemas para a resolução de equações diferenciais em sala de aula. Iniciou-se a abordagem da situação-problema proposta com um exemplo de queda livre, levando-se em consideração a resistência do ar, cuja modelagem se desenvolveu a partir de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem (Ver o Problema 1).

Problema 1: *Um alpinista ao chegar no topo de um penhasco tendo uma visão ampla da paisagem abaixo, quis saber a velocidade ao soltar uma pedra de $5kg$ do topo onde ele se encontrava; considerando a força da resistência do ar igual a $2N$, e a aceleração da gravidade igual a $10m/s^2$. Determine a função da velocidade em função do tempo.*

Na segunda situação-problema foi abordado o conceito de MHS (Movimento Harmônico Simples), sendo sua modelagem por meio de uma equação diferencial ordinária de 2ª ordem (Ver o Problema 2).

Problema 2: *Uma partícula presa a uma mola move-se verticalmente regida pela equação horária $\frac{d^2x}{dt^2} + 64x = 0$, em $x = x(t)$ representa o deslocamento da partícula no tempo. Supondo $x(0) = 4m$ e $\frac{dx}{dt}(0) = v(0) = 2m/s$, encontre x em função de t.*

A situação proposta no Problema 2 permitiu analisar o comportamento oscilatório de sistemas como molas e pêndulos, ao considerar a relação entre a posição, a velocidade e a aceleração do sistema, bem como as condições iniciais e as forças restauradoras envolvidas.

No primeiro momento da aula, abordou-se a Resolução de Problemas com base nos quatro conceitos propostos por George Polya, já apresentados no Quadro 1 deste trabalho. Em seguida, foi conduzido uma revisão sobre alguns conceitos básicos das equações diferenciais ordinárias de primeira e segunda ordem, incluindo exemplos que ilustram como identificá-las e encontrar suas soluções analíticas.

Em seguida, trabalhamos com os alunos na aplicação de acordo com os quatro passos definidos por Polya para a Resolução de Problemas, nas situações descritas no Problema 1 e no Problema 2.

Ao final da primeira parte do minicurso, os participantes foram desafiados a resolver dois problemas matemáticos, aplicando o método dos quatro passos de George Polya, previamente apresentado e discutido ao longo da manhã. Esta etapa permitiu avaliar a internalização dos conceitos pelos alunos. Ao final, na ocasião os acadêmicos responderam o segundo questionário.

Às 14h00m, no laboratório de Matemática do Ifap deu-se início ao mini curso, que contou com a participação de 3 (três) discentes de nível superior, distribuídos entre os cursos de Licenciatura em Matemática (1) e Licenciatura em Física (2). Conforme as etapas anteriores da aula, o mesmo procedimento foi adotado no decorrer da sessão, conforme descrito no parágrafo segundo em diante. Foi utilizado os mesmos exemplos, ou seja, o Problema 1 e o Problema 2.

No encerramento da segunda etapa do minicurso os participantes foram instigados novamente a resolver dois problemas matemáticos, aplicando o método dos quatro passos de George Polya, previamente apresentado e discutido ao longo da tarde. Esta etapa consistiu em avaliar a internalização dos conceitos pelos alunos.

A seguir, é apresentado o quadro contendo o plano de aula, que foi implementado no minicurso.

Quadro 2 - Dados de planejamento da aula

<table>
<tr><th colspan="2">IDENTIFICAÇÃO</th></tr>
<tr><td colspan="2">INSTITUIÇÃO: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amapá
PESQUISADORES: Dinael Amaral Ferreira; Gadi Silva dos Santos.
CURSOS ENVOLVIDOS: Licenciatura em Matemática e Licenciatura em Física.</td></tr>
<tr><td colspan="2">TEMA: Equações Diferenciais Ordinárias de 1ª e 2ª Ordem.</td></tr>
<tr><td>Etapas</td><td>Descrição</td></tr>
<tr><td>1</td><td>Explicitou os conceitos e as quatro etapas ou passos da resolução de problemas propostos por George Polya.</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Revisão dos conceitos de equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem e 2ª ordem.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Apresentação de exemplos e exercícios envolvendo as equações trabalhadas.</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Proposta de duas situações problema em que os sujeitos participantes serão levados a aplicar os conceitos da Resolução de Problemas para encontrar a solução.</td></tr>
</table>

Fonte: Os autores, 2025

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

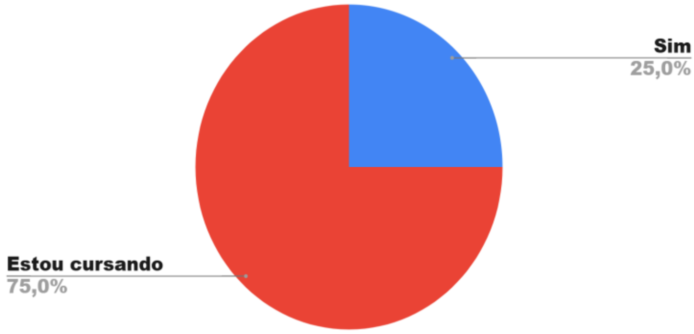
Este trabalho teve como foco a Resolução de Problemas como metodologia para o ensino de equações diferenciais ordinárias. Para alcançar tal objetivo foi aplicado um minicurso onde os participantes foram instruídos a identificar e aplicar os quatro passos do processo de resolução de problemas matemáticos, conforme descrito por George Polya. Esses passos incluem a compreensão do problema, a formulação de um plano, a execução do plano e a revisão da solução. Ao contextualizar esses passos em exemplos concretos, o estudo visou não apenas facilitar o aprendizado das técnicas de resolução em equações diferenciais, mas também aprimorar a habilidade dos alunos em resolver problemas matemáticos de forma sistemática e eficiente. Assim proporcionando aos alunos uma compreensão prática e aplicada dos conceitos por meio da resolução de exemplos de EDOs de primeira e segunda ordem, impulsionando a construção do conhecimento matemático.

O minicurso teve como objetivo investigar o uso da Resolução de Problemas, fundamentada nos quatro passos propostos por George Polya como metodologia de ensino para Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs). A proposta foi aplicada em dois momentos distintos: na parte da manhã (09h - 12h) e à tarde (14h - 17h), contemplando alunos de graduação dos cursos de Licenciatura em Matemática e Licenciatura em Física. Inicialmente, os alunos responderam a um questionário com cinco questões sobre o tema em estudo. Os resultados obtidos serão apresentados em formato gráfico na sequência. A primeira pergunta buscou avaliar o conhecimento inicial dos participantes em relação a EDO. Os dados do Gráfico 1 revelam que a maioria dos alunos (75%) não possuía conhecimento prévio, enquanto apenas (25%) declararam ter alguma familiaridade com o assunto.

Questionário 1:

1 - Você já cursou a disciplina de Equações Diferenciais?

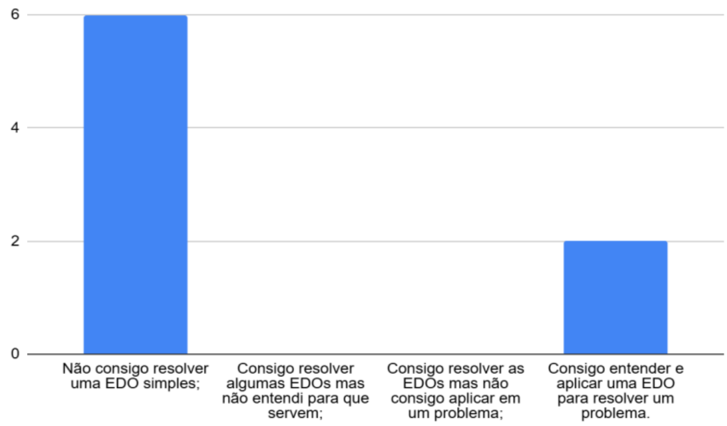
Gráfico 1



Fonte: Os autores, 2025

2 - Qual o seu nível de compreensão após concluir a disciplina de Equações Diferenciais?

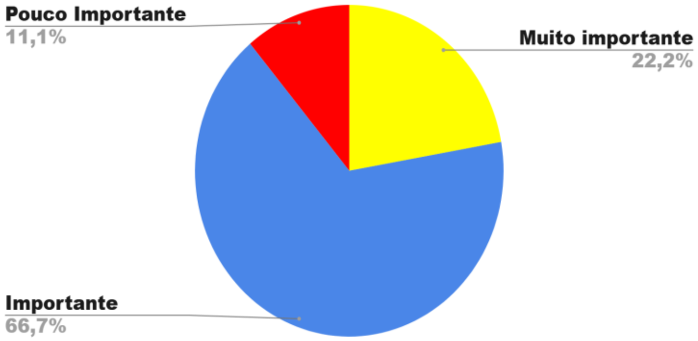
Gráfico 2



Fonte: Os autores, 2025

3 - Qual a sua opinião sobre a importância do estudo das Equações Diferenciais para a sua área de formação?

Gráfico 3

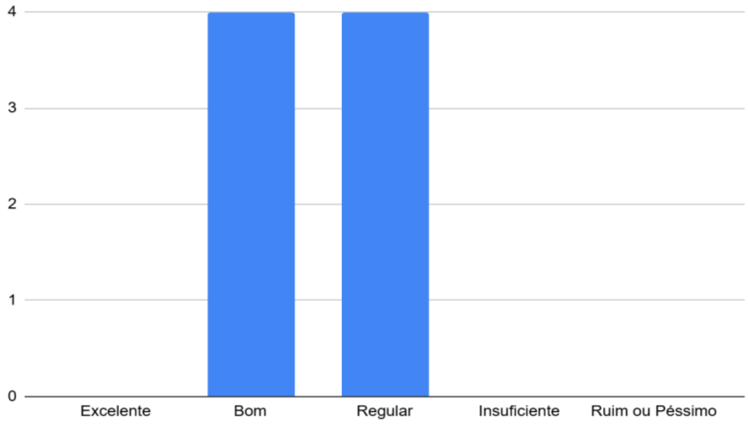


Fonte: Os autores, 2025

Dada a ausência prévia de estudo em Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) pela maioria dos alunos, as percepções dos acadêmicos acerca da qualidade do ensino apresentaram diferentes perspectivas. Houve aqueles que, por estarem cursando a disciplina, expressaram suas opiniões, enquanto outros declararam "não ver nada anormal em EDO". Um dos participantes justificou sua dificuldade em avaliar com clareza devido à sua falta de familiaridade com o conteúdo, conforme evidenciado no gráfico a seguir e em um excerto de sua resposta do questionário 1 da pergunta 4.

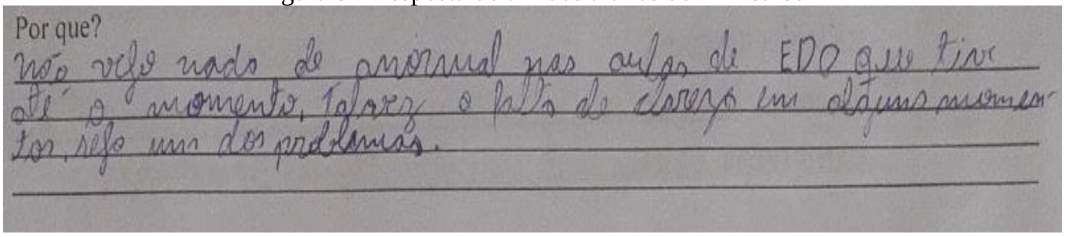
4 - Como você avalia a qualidade do ensino na disciplina de Equações Diferenciais em seu curso de graduação? Por que?

Gráfico 4



Fonte: Os autores, 2025

Figura 3 - Resposta de um dos alunos do minicurso

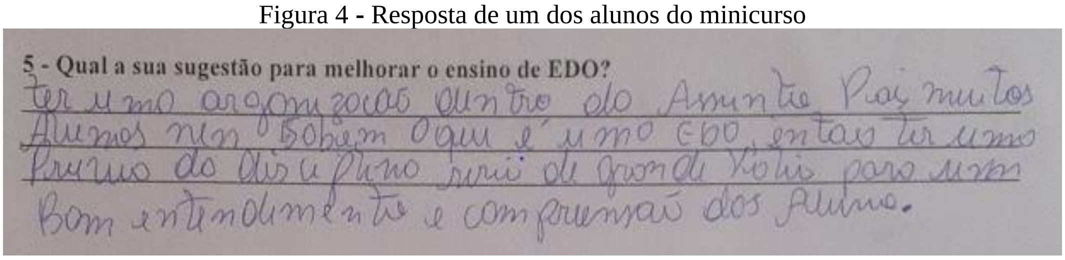

Por que?
não vejo nada de anormal nas aulas de EDO que tive até o momento, talvez a falta de clareza em alguns momentos, seja um dos problemas.

Fonte: Os autores, 2025

Durante as sessões, foi observado que a estruturação da aula em torno dos quatro passos de Polya — compreensão do problema, elaboração de um plano, execução do plano e revisão da solução — favoreceu uma abordagem sistemática e organizada da resolução de problemas de EDOs. A primeira etapa, de compreensão do problema, revelou-se crucial, pois muitos alunos inicialmente apresentaram dificuldades em interpretar corretamente o enunciado das questões, principalmente na identificação do tipo de equação diferencial (primeira ou segunda ordem) e na seleção do método de solução apropriado. O extenso período desde o estudo de cálculo, conforme relatado pelos alunos, representou um obstáculo na resolução de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO). A realização de uma revisão prévia de cálculo diferencial e integral ao início do curso foi apontada como de grande importância pelos participantes, conforme evidenciado na resposta de um dos entrevistados no questionário 1, questão 5.

5 - Qual a sua sugestão para melhorar o ensino de EDO?

Figura 4 - Resposta de um dos alunos do minicurso


5 - Qual a sua sugestão para melhorar o ensino de EDO?
ter uma orgonizocao dentro do Assunto Pois muitos Alunos nao Sabem oque é uma EDO, entao ter uma Previo do disciplina seria de grande valia para um Bom entendimento e compreensão dos Alunos.

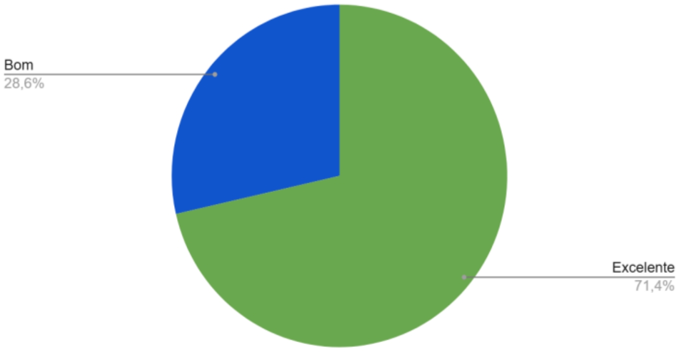
Fonte: Os autores, 2025

A aplicação do questionário final indicou uma avaliação positiva do minicurso por parte dos acadêmicos. Observou-se uma excelente percepção da metodologia utilizada, notavelmente a Resolução de Problemas de George Polya, que era inédita para muitos. Adicionalmente, os participantes contribuíram com sugestões para o aprimoramento do ensino, cujos detalhes podem ser visualizados nas imagens do questionário que seguem.

Questionário 2:

1 - Como você avalia a eficácia do minicurso em prepará-lo para resolver problemas utilizando equações diferenciais? Justifique sua resposta:

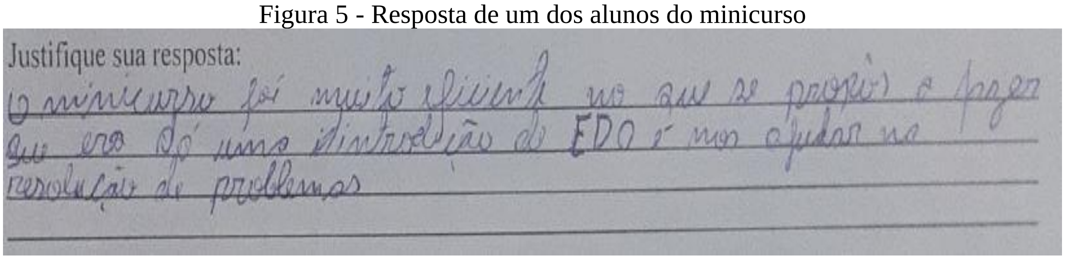
Gráfico 5



Fonte: Os autores, 2025

Ao justificarem a avaliação do minicurso, os acadêmicos participantes destacaram a relevância da participação e a influência do minicurso na compreensão da Equação Diferencial no cotidiano. Adicionalmente, mencionaram sua contribuição para a resolução de problemas, conforme ilustrado nas imagens a seguir.

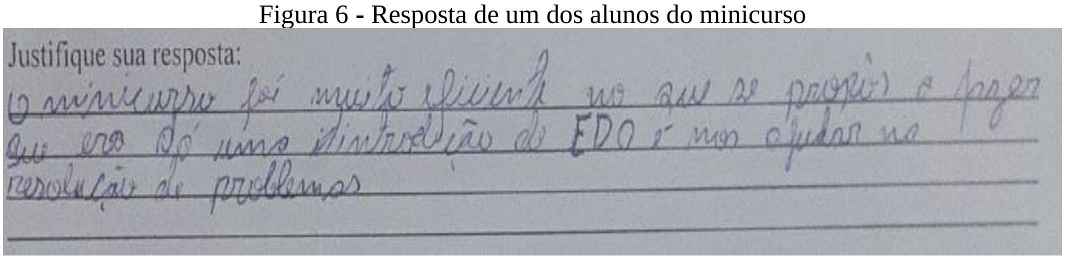
Figura 5 - Resposta de um dos alunos do minicurso


Justifique sua resposta:
O minicurso foi muito eficiente no que se propôs a fazer que era dá uma introdução de EDO e nos ajudar na resolução de problemas

Fonte: Os autores, 2025

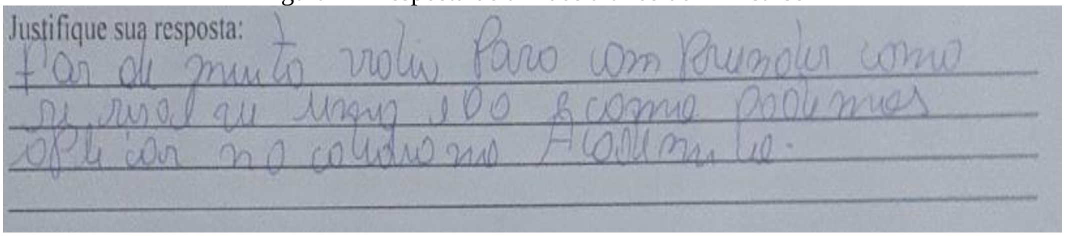
2 - O minicurso que você participou utilizou a metodologia de Resolução de Problemas utilizando Equações Diferenciais Ordinárias. Qual a sua percepção sobre esta abordagem na compreensão dos conceitos?

Figura 6 - Resposta de um dos alunos do minicurso


Justifique sua resposta:
O minicurso foi muito eficiente no que se propôs a fazer que era dá uma introdução de EDO e nos ajudar na resolução de problemas

Fonte: Os autores, 2025

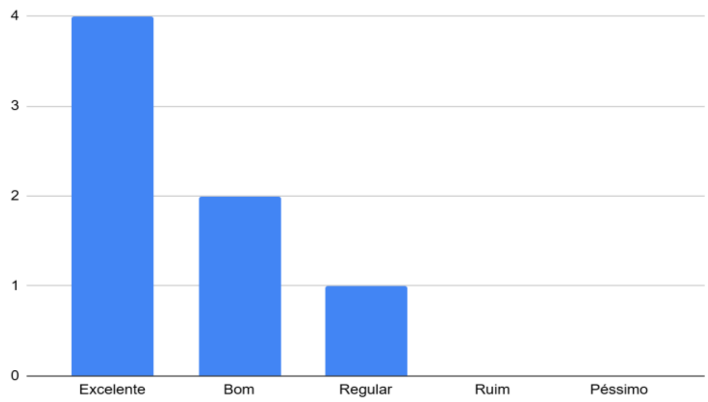
Figura 7 - Resposta de um dos alunos do minicurso



Fonte: Os autores, 2025

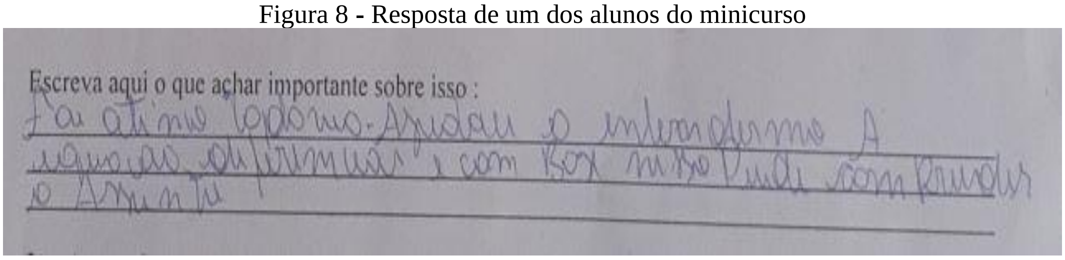
Em resposta à segunda pergunta do questionário 2, os participantes compartilharam suas experiências com a metodologia de resolução de problemas, discorrendo sobre sua percepção da abordagem e a compreensão dos conceitos envolvidos, onde descreveram conceitos ao terem contato com essa metodologia. Um dos participantes destacou como a metodologia auxiliou na compreensão de equações diferenciais e para que ela serve, como mostra as imagens e o gráfico a seguir.

Gráfico 6



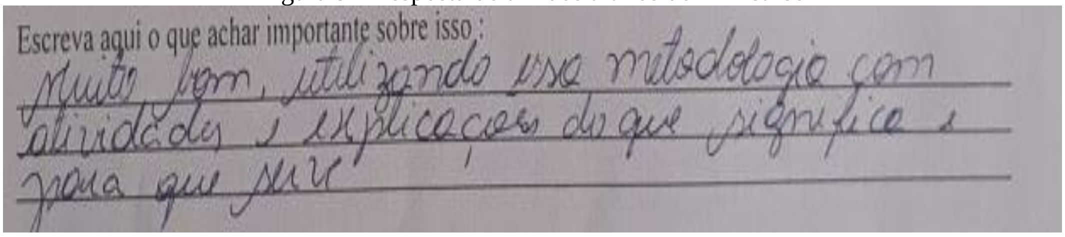
Fonte: Os autores, 2025

Figura 8 - Resposta de um dos alunos do minicurso



Fonte: Os autores, 2025

Figura 9 - Resposta de um dos alunos do minicurso

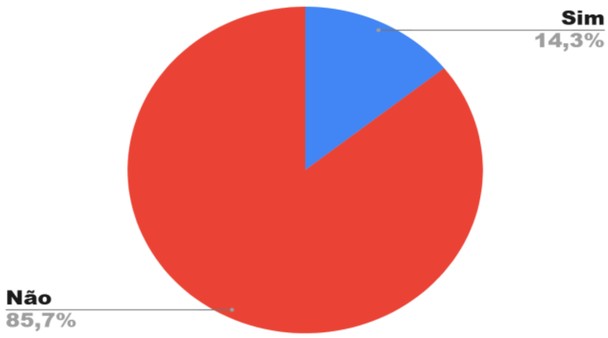


Fonte: Os autores, 2025

Ao serem questionados sobre o conhecimento prévio da metodologia abordada pelos pesquisadores (pergunta 3 do Questionário 2), a vasta maioria dos participantes não possuía conhecimento sobre o tema. O gráfico a seguir ilustra detalhadamente as respostas obtidas.

3 - Antes de participar deste minicurso, você já tinha conhecimento sobre a metodologia da Resolução de Problemas de George Polya?

Gráfico 7



Fonte: Os autores, 2025

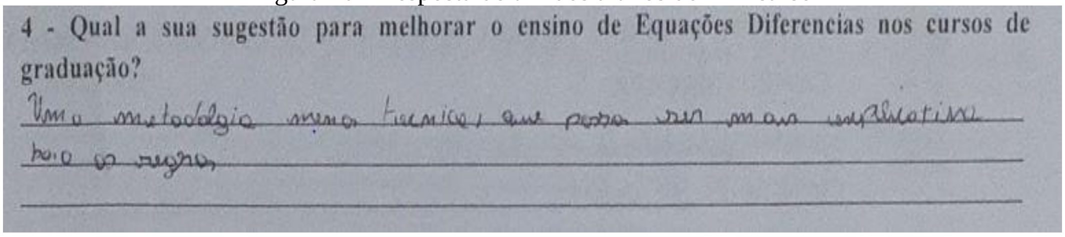
A quarta pergunta do Questionário 2 buscou coletar sugestões dos participantes sobre como aprimorar o ensino de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO). As respostas foram diversas, evidenciando diferentes perspectivas sobre o tema.

Entre as sugestões, destacaram-se:

- A necessidade de uma metodologia menos técnica.
- O pedido por "mais resoluções de problemas".
- A importância de um professor com maior capacidade de explicação do assunto.

A seguir, será apresentada a imagem contendo a resposta mais pertinente, na perspectiva dos pesquisadores, que resume as principais contribuições dos participantes.

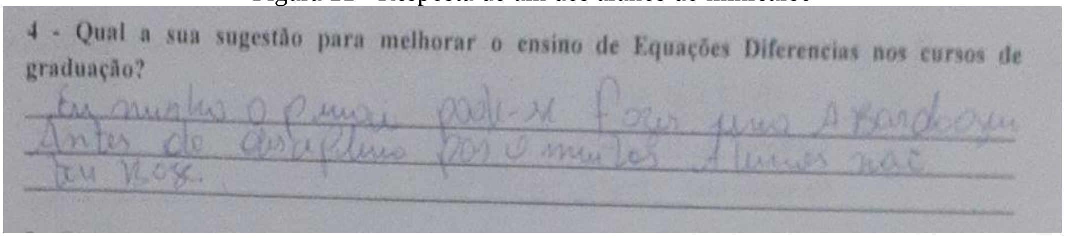
Figura 10 - Resposta de um dos alunos do minicurso


4 - Qual a sua sugestão para melhorar o ensino de Equações Diferencias nos cursos de graduação?

Uma metodologia menos técnica, que possa ser mais explicativa para as regras.

Fonte: Os autores, 2025

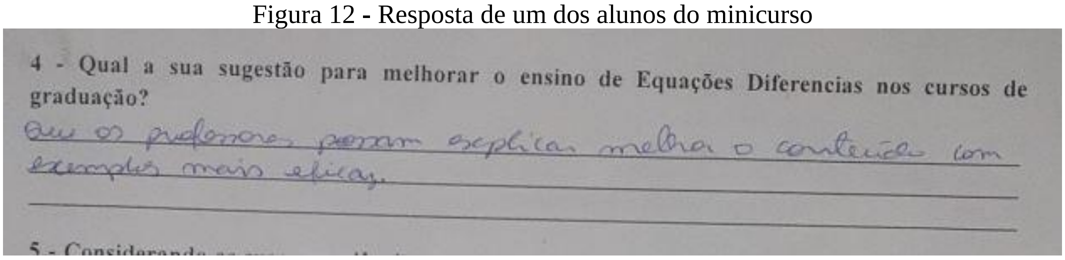
Figura 11 - Resposta de um dos alunos do minicurso


4 - Qual a sua sugestão para melhorar o ensino de Equações Diferencias nos cursos de graduação?

Eu acho o que pode-se fazer para abordagem antes de disciplina pois muitos alunos não tem base.

Fonte: Os autores, 2025

Figura 12 - Resposta de um dos alunos do minicurso


4 - Qual a sua sugestão para melhorar o ensino de Equações Diferencias nos cursos de graduação?

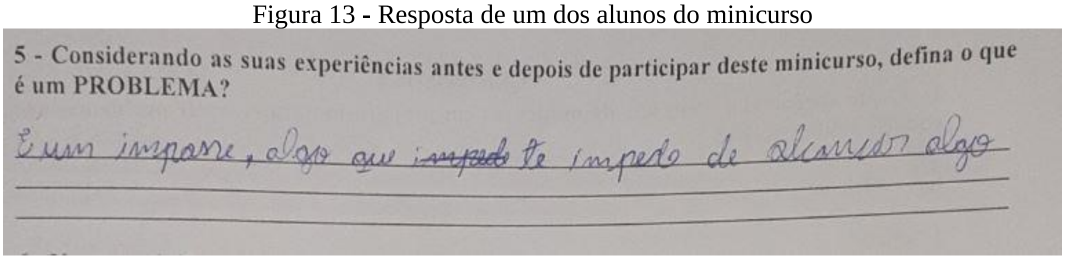
Que os professores possam explicar melhor o conteúdo com exemplos mais eficaz.

Fonte: Os autores, 2025

A quinta pergunta do Questionário 2 buscou coletar as percepções dos participantes sobre o "antes e o depois" do minicurso, focando nas experiências adquiridas. Especificamente, solicitou-se que definisse o conceito de "resolução de problemas" após a participação.

As respostas apresentaram uma diversidade de entendimentos, refletindo as diferentes perspectivas dos participantes sobre o tema. A seguir, serão apresentadas algumas das definições mais relevantes, em formato de imagem.

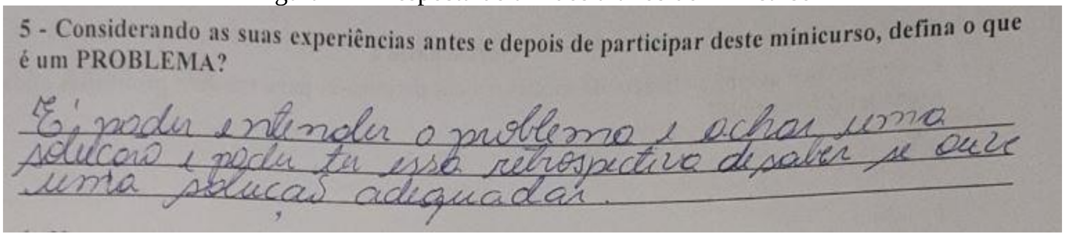
Figura 13 - Resposta de um dos alunos do minicurso


5 - Considerando as suas experiências antes e depois de participar deste minicurso, defina o que é um PROBLEMA?

É um impasse, algo que ~~impede~~ te impede de alcançar algo

Fonte: Os autores, 2025

Figura 14 - Resposta de um dos alunos do minicurso


5 - Considerando as suas experiências antes e depois de participar deste minicurso, defina o que é um PROBLEMA?

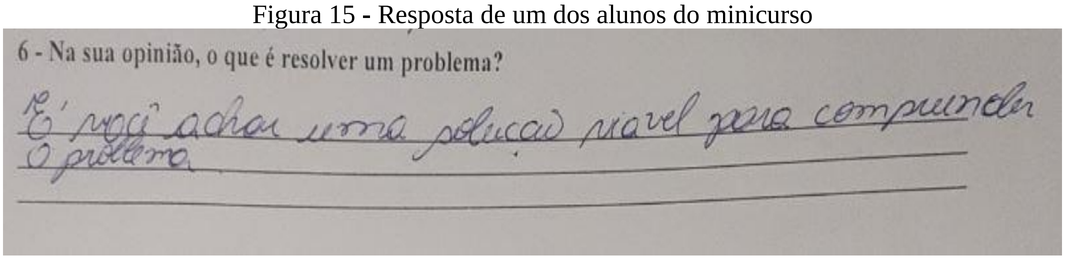
É poder entender o problema e achar uma solução e poder ter essa retrospectiva de saber se ouve uma solução adequada.

Fonte: os autores, 2025

A última pergunta do Questionário 2 convidou os participantes a expressarem sua compreensão sobre o que é resolver um problema matemático. As respostas apresentaram uma diversidade de perspectivas, refletindo os entendimentos individuais de cada aluno sobre o tema.

A seguir, serão apresentadas em imagem as respostas dos participantes, ilustrando a variedade de conceitos sobre a resolução de problemas matemáticos.

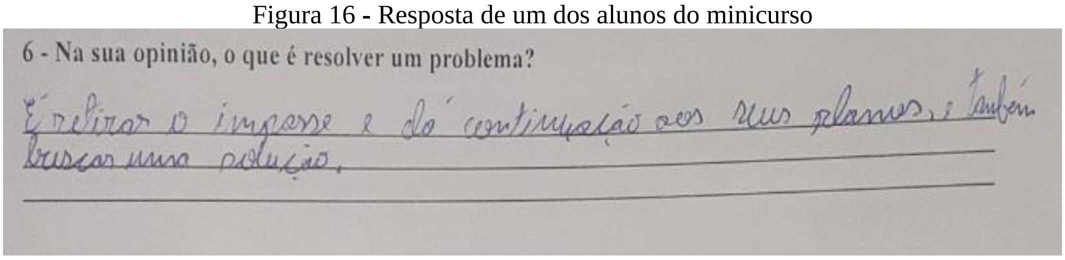
Figura 15 - Resposta de um dos alunos do minicurso


6 - Na sua opinião, o que é resolver um problema?

É você achar uma solução viável para compreender o problema

Fonte: Os autores, 2025.

Figura 16 - Resposta de um dos alunos do minicurso


6 - Na sua opinião, o que é resolver um problema?

É retirar o impasse e dá continuação aos seus planos, e também buscar uma solução.

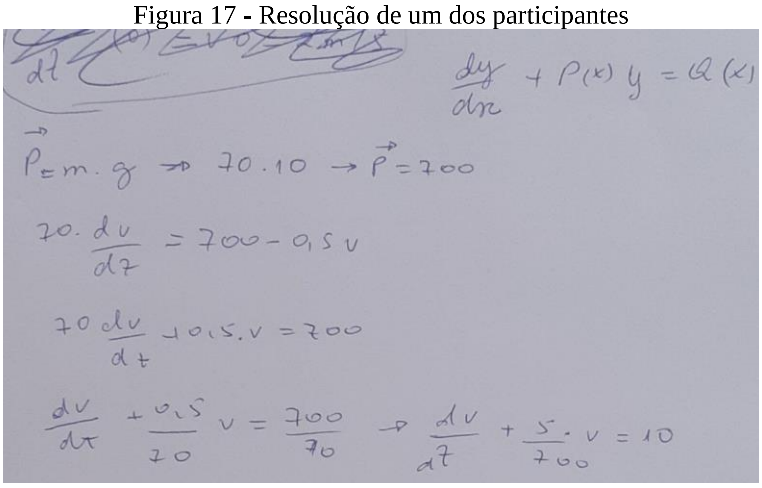
Fonte: Os autores, 2025.

Na formulação e execução do plano, os participantes demonstraram progressiva autonomia. Ao revisitar conceitos básicos de EDOs e aplicar as técnicas de solução em exemplos práticos (Problema 1 e Problema 2), foi possível perceber um aumento da confiança dos alunos na aplicação dos métodos analíticos. A prática orientada reforçou a capacidade de planejamento e execução lógica das etapas de resolução.

A revisão da solução, último passo do método de Polya, mostrou-se desafiadora para alguns estudantes, que, em um primeiro momento, não tinham o hábito de verificar a consistência de suas respostas. Com a orientação sistemática, entretanto, houve uma melhora visível na capacidade crítica dos alunos, que passaram a conferir suas soluções e discutir possíveis inconsistências.

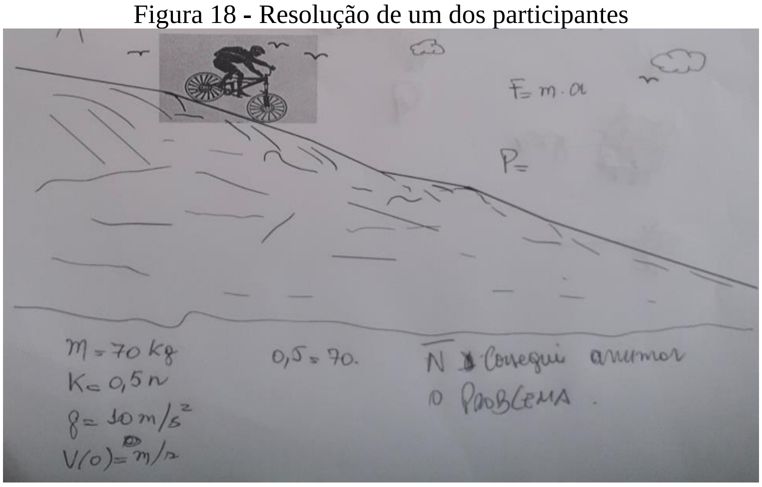
Ao final de cada minicurso, a atividade de resolução dos dois problemas propostos permitiu avaliar a internalização dos conceitos trabalhados. Embora tenha havido um esforço em seguir os quatro passos, indicando a internalização dos conteúdos teóricos e o desenvolvimento de uma abordagem mais estratégica, o problema proposto pela equipe expôs desafios significativos. Muitos participantes demonstraram dificuldades em cálculo, e alguns, diante da dificuldade em resolver, optaram por desistir sem explicação. Na imagem a seguir, apresenta-se alguns rascunhos dos participantes ilustrando suas tentativas em resolver os problemas.

Figura 17 - Resolução de um dos participantes



Fonte: Os autores, 2025

Figura 18 - Resolução de um dos participantes



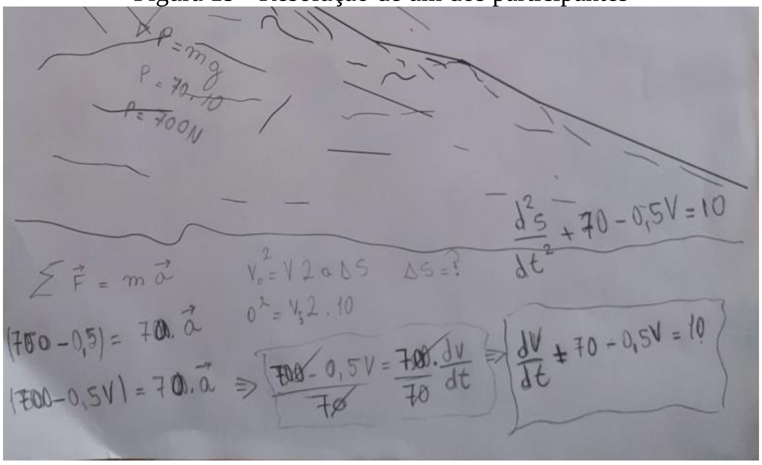
Fonte: Os autores, 2025

Conforme ilustrado na figura 17, observa-se que um dos participantes compreendeu o problema corretamente de acordo com o enunciado. No entanto, ao se deparar com o problema matemático, enfrentou dificuldades na execução dos cálculos, culminando na desistência da resolução do problema. Na figura 18 o participante conseguiu fazer apenas as coletas do problema, como podemos observar ele justificou que não conseguiu “arrumar o problema”.

O número reduzido de participantes no segundo momento (apenas três discentes) permitiu um acompanhamento mais individualizado, o que favoreceu ainda mais a construção do conhecimento. Essa interação próxima possibilitou identificar dúvidas pontuais e corrigir, de maneira mais eficaz, dificuldades relacionadas à interpretação dos problemas e aplicação dos métodos de solução.

O desafio proposto no minicurso foi aplicado aos acadêmicos, e um dos participantes destacou-se ao demonstrar compreensão do problema. No entanto, sua resolução não atingiu plenamente o esperado. Sua habilidade de interpretar as demandas da questão é evidente, embora alguns equívocos tenham sido cometidos, conforme ilustrado na imagem a seguir.

Figura 19 - Resolução de um dos participantes



Fonte: Os autores, 2025

Em síntese, o uso da Resolução de Problemas segundo a metodologia de Polya mostrou-se eficaz para o ensino de EDOs; porém os conceitos matemáticos dos participantes não foram suficientemente sólidos para que pudessem realizar os cálculos de maneira clara e precisa. Os resultados indicam que a aplicação de uma metodologia estruturada não apenas facilita o aprendizado de técnicas específicas, mas também contribui para a formação de competências essenciais à prática matemática, como o raciocínio lógico, a análise crítica e a autonomia na resolução de problemas.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A análise dos resultados obtidos permite afirmar que os objetivos propostos neste trabalho foram, em grande parte, atingidos. A aplicação da metodologia de Resolução de Problemas, segundo Polya, mostrou-se eficaz para o ensino de Equações Diferenciais Ordinárias, favorecendo não apenas a compreensão de técnicas específicas, mas também o desenvolvimento de competências essenciais, como raciocínio lógico, análise crítica e autonomia na resolução de problemas.

Entretanto, observou-se que a fragilidade conceitual em matemática por parte de alguns participantes limitou a clareza e a precisão na execução dos cálculos, evidenciando a necessidade de um reforço prévio ou paralelo desses fundamentos para potencializar os resultados da metodologia.

Como trabalhos futuros, sugere-se a ampliação da pesquisa para diferentes contextos e níveis de ensino, bem como a investigação de estratégias complementares que fortaleçam a base conceitual dos estudantes antes ou durante a aplicação da metodologia. Além disso, seria relevante explorar o uso de recursos tecnológicos e atividades interdisciplinares que possam enriquecer o processo de aprendizagem e torná-lo ainda mais significativo.

REFERÊNCIAS

BARROS FILHO, Aníbal Ataídes ; LAUDARES, João Bosco; MIRANDA, Dimas Felipe de. A resolução de problemas em ciências com equações diferenciais ordinárias de 1ª e 2ª ordem usando análise gráfica. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 16, n. 2, p. 323–348, 2014.

CRESWELL, John W. **Projeto de pesquisa:** métodos qualitativos, quantitativos e mistos. Tradução de Magda Lopes. 3. ed. Porto Alegre: Artmed, 2010.

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da resolução de problemas de matemática**. 12. ed. São Paulo: Ática, 2000.

GONZALES, Fredy Enrique. Reflexões sobre alguns conceitos da pesquisa qualitativa. **Revista Pesquisa Qualitativa**, São Paulo, v. 8, n. 17, p. 155–183, 2020.

MARCONI, Maria de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. **Fundamentos de metodologia científica**. São Paulo: Atlas, 2003.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas:** um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 1945.

ROMANATTO, Mauro Carlos. Resolução de problemas nas aulas de matemática. **Revista Eletrônica de Educação**, v. 6, n. 1, p. 299–311, 2012.

ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. **Equações diferenciais**. São Paulo: Pearson Education, 2001.

ANEXOS

Anexo 1 - Questionário 1.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO AMAPÁ - CAMPUS MACAPÁ.

Aluno(a):____

Curso/Turma:____

Questionário 1

1 - Você já cursou a disciplina de Equações Diferenciais?

( ) Sim

( ) Não

( ) Estou cursando

2 - Qual o seu nível de compreensão após concluir a disciplina de Equações Diferenciais?

( ) Não consigo resolver uma EDO simples;

( ) Consigo resolver algumas EDOs mas não entendi para que servem;

( ) Consigo resolver as EDOs mas não consigo aplicar em um problema;

( ) Consigo entender e aplicar uma EDO para resolver um problema.

3 - Qual a sua opinião sobre a importância do estudo das Equações Diferenciais para a sua área de formação?

( ) Muito importante

( ) Importante

( ) Pouco importante

( ) Não considero importante

Justifique sua resposta:

____

____

____

____

5 - Como você avalia a qualidade do ensino na disciplina de Equações Diferenciais em seu curso de graduação?

( ) Excelente

( ) Bom

( ) Regular

( ) Insuficiente

( ) Ruim ou Péssimo

Por que?
____
____
____
____

5 - Qual a sua sugestão para melhorar o ensino de EDO?
____
____
____

Anexo 2 - Questionário 2.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO AMAPÁ - CAMPUS MACAPÁ.

Aluno(a):____

Curso/Turma:____

Questionário 2

1 - Como você avalia a eficácia do minicurso em prepará-lo para resolver problemas utilizando equações diferenciais?

( ) Excelente

( ) Bom

( ) Regular

( ) Ruim

( ) Péssimo

Justifique sua resposta:
____
____
____
____

2 - O minicurso que você participou utilizou a metodologia de Resolução de Problemas utilizando Equações Diferenciais Ordinárias. Qual a sua percepção sobre esta abordagem na compreensão dos conceitos?

( ) Excelente

( ) Bom

( ) Regular

( ) Ruim

( ) Muito ruim

Escreva aqui o que achar importante sobre isso :

____
____
____

3 - Antes de participar deste minicurso, você já tinha conhecimento sobre a metodologia da Resolução de Problemas de George Polya?

( ) sim

( ) Não

4 - Qual a sua sugestão para melhorar o ensino de Equações Diferencias nos cursos de graduação?

____
____
____

5 - Considerando as suas experiências antes e depois de participar deste minicurso, defina o que é um PROBLEMA?

____
____
____

6 - Na sua opinião, o que é resolver um problema?

____
____
____

Anexo 3 - Desafio Proposto.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO AMAPÁ - CAMPUS MACAPÁ.

Aluno(a)|: ____

Curso/Turma: ____

Vamos resolver os desafios?

Desafio 1 - Um ciclista está descendo uma ladeira inclinada e deseja saber a velocidade da bicicleta após certo tempo de descida. O ciclista e a bicicleta juntos tem massa igual a $70\,kg$. A força de resistência do ar é proporcional à velocidade da bicicleta, com uma constante de proporcionalidade $k = 0{,}5\,N$. Considere a aceleração da gravidade $g = 10\frac{m}{s^2}$ e suponha que a velocidade inicial da bicicleta seja $v(0) = 0\frac{m}{s}$. Com base nestas informações determine uma função que descreve a velocidade da bicicleta em função do tempo.

Desafio 2 - Uma partícula se move horizontalmente em um trilho e sua posição no tempo $x(t)$ é descrita pela equação diferencial $\frac{d^2x}{dt^2} + 25x = 0$. Suponha que a posição inicial da partícula seja $x(0) = 3m$ e $\frac{dx}{dt}(0) = v(0) = 2m/s$. Encontre um modelo matemático que determine a posição da partícula em função do tempo.