INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO AMAPÁ
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
CAMPUS MACAPÁ

ISMAEL OTONY MAUÉS

GEOMETRIA FRACTAL: uma abordagem com aplicações voltada ao 3° ano do ensino médio

MACAPÁ
2023

ISMAEL OTONY MAUÉS

GEOMETRIA FRACTAL: uma abordagem com aplicações voltada ao 3° ano do ensino médio

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amapá, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Helington Franzotti Araujo de Souza.

MACAPÁ

2023

Biblioteca Institucional - IFAP
Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

M448g Maués, Ismael Otony
Geometria Fractal: uma abordagem com aplicações voltada ao 3° ano do ensino médio / Ismael Otony Maués - Macapá, 2023.
51 f.: il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) -- Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amapá, Campus Macapá, Curso de Licenciatura em Matemática, 2023.

Orientador: Helington Franzotti Araujo de Souza.

1. geometria euclidiana. 2. geometria fractal. 3. curva de Koch. I. Souza, Helington Franzotti Araujo de, orient. II. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica do IFAP
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

ISMAEL OTONY MAUÉS

GEOMETRIA FRACTAL: uma abordagem com aplicações voltada ao 3° ano do ensino médio

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amapá, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Helington Franzotti Araujo de Souza.

BANCA EXAMINADORA

gov.br Documento assinado digitalmente
HELINGTON FRANZOTTI ARAUJO DE SOUZA
Data: 07/09/2023 18:22:35-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Me. Helington Franzotti Araújo de Souza (Orientador)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amapá

gov.br Documento assinado digitalmente
CARLOS ALEXANDRE SANTANA OLIVEIRA
Data: 07/09/2023 23:54:51-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Carlos Alexandre Santana de Oliveira (Membro interno)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amapá

gov.br Documento assinado digitalmente
EDUARDO DA CONCEICAO ROSARIO
Data: 07/09/2023 19:49:22-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Me. Eduardo da Conceição Rosário (Membro externo)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amapá

Apresentado em: 04/09/2023.

Conceito/Nota: 96,7

Aos meus familiares e amigos que estiveram sempre ao meu lado.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pela oportunidade de realizar mais um sonho, pois até aqui o Senhor me sustentou e nunca me abandonou.

Quero expressar gratidão em especial à minha mãe Rosireny Otony e ao meu pai Manuel Maria, que estiveram me incentivando nesse período; nos momentos difíceis eles sempre estiveram ao meu lado dando todo apoio. Eu sei que sempre estão torcendo para o meu sucesso.

Aos meus irmãos e amigos que sempre estavam me ajudando nessa trajetória, agradeço pela amizade, apoio e incentivo incondicional.

Não podia deixar de agradecer ao meu orientador, amigo e professor Me. Helington Franzotti pelo conhecimento compartilhado, pela experiência dividida, pelos importantes momentos de aprendizagem proporcionados, pela agradável companhia, pelas insistências e principalmente por ter me incentivado a chegar nesse momento.

A todos aqueles que me ajudaram e que estiveram presentes durante a realização dessa difícil jornada.

“Quem não ama não o conhece, pois Deus é amor.”

(Bíblia Sagrada, 1 JOÃO, 4:8)

RESUMO

Este trabalho foi elaborado com objetivo de fazer uma abordagem elementar da Geometria Fractal a alunos do 3º Ano do Ensino Médio, mostrando algumas características clássicas e alguns aspectos relacionados à teoria dos fractais. Inicialmente faz-se uma abordagem breve sobre a geometria euclidiana e algumas características de outras geometrias. A seguir, inicia-se o estudo da Geometria Fractal, destacando que esta permite observar uma interessante conexão entre a construção de elementos matemáticos e alguns objetos presentes na natureza. Foram apresentados alguns fractais clássicos, como a curva de Koch, o conjunto de Cantor, o triângulo e o tapete de Sierpinski. Foram abordadas as características matemáticas destes objetos com os participantes desta pesquisa, sobretudo a sua dimensão, que reflete uma característica peculiar dos fractais e que os difere em relação a objetos da geometria euclidiana. Os resultados indicaram que a abordagem da Geometria Fractal com os alunos do ensino médio contribui com uma motivação e interesse pelo estudo da matemática, além de ampliar a compreensão dos conceitos geométricos.

Palavras-chave: geometria euclidiana; geometria fractal; curva de Peano; curva de Koch; conjunto de Cantor; triângulo de Sierpinski.

ABSTRACT

This work was elaborated with the objective of making an elementary approach of fractal geometry to students of the 3rd Year of High School, showing some classic characteristics and some aspects related to the theory of fractals. Initially, a brief approach is made to Euclidean geometry and some characteristics of other geometries. Next, the study of fractal geometry begins, emphasizing that it allows observing an interesting connection between the construction of mathematical elements and some objects present in nature. Some classic fractals were presented, such as the Koch curve, the Cantor set, the triangle and the Sierpinski carpet. The mathematical characteristics of these objects were discussed with the participants of this research, especially their size, which reflects a peculiar characteristic of fractals and which differs them in relation to objects of Euclidean geometry. The results indicated that the approach of fractal geometry with high school students contributes to their motivation and interest in the study of mathematics, in addition to expanding their understanding of geometric concepts.

Keywords: euclidean geometry; fractal geometry; Peano curve; Koch curve; Cantor set; Sierpinski triangle.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A matemática tem sido mencionada como uma das principais causas de dificuldades e motivação para a repetência e evasão escolar. Rabay (2013, p. 13) afirma que a matemática é "considerada pelo senso comum a disciplina menos apreciada pela maioria dos alunos" e sobre este aspecto, a autora ainda afirma que "ela também é vista como uma disciplina fechada em si mesma, sem relação com a vida real e estagnada no tempo" (RABAY, 2013, p. 13). Nesse sentido, um dos principais desafios do professor de matemática consiste em fazer com que os alunos sintam-se motivados e aprendam a gostar da matemática, com suas múltiplas características, entre elas, por exemplo, a "lógica, a beleza e a diversidade de campos de aplicação" (RABAY, 2013, p.13).

Uma das áreas mais importantes da matemática dentro do currículo escolar é o estudo da Geometria, sobretudo das geometrias euclidianas. Assim, os alunos têm contato com a geometria plana, espacial e analítica. Outras geometrias geralmente não são abordadas, mas podem ser ensinadas com o objetivo de apresentar ao aluno a diversidade da matemática e abrir portas para que possam construir conhecimentos por meio de problemas pouco explorados em sala de aula. Dentre estas geometrias, situa-se a Geometria Fractal, que pode ser abordada em sala de aula, de diversas formas, por exemplo, associada ao estudo das progressões geométricas, sequências numéricas, análise combinatória, entre outros.

Corroborando com esta ideia, Nunes (2006, p. 7), enfatiza que

> […] a Geometria Fractal permite a integração de diversos temas da matemática e de outras áreas, desde as ciências naturais, às econômicas-sociais e a tecnologia". Quando incluídas no ensino, permite desenvolver o espírito experimental dos alunos de forma a entender a geometria de objetos não tradicionais e de estabelecer modelos matemáticos para auxiliar os estudos dos fenômenos naturais (NUNES, 2006, p. 7).

Uma motivação imprescindível para estudar a Geometria Fractal é a observação de elementos da natureza: aproximam-se muito mais de fractais do que de figuras da Geometria Euclidiana, e, no entanto, aquela não é sequer citada na Educação Básica, ao contrário desta. Além de tudo isto, no estudo de Geometria Fractal há margem para a criação de inúmeros problemas e para a utilização de softwares para a geração dos fractais, enriquecendo as discussões, sobretudo para aplicação em turmas de Ensino Médio (MENDONÇA, 2016, p. 10).

1.1 Problemática

A falta de abordagens de novos temas matemáticos voltados ao dia a dia do aluno, faz com que estes tenham dificuldades de relacionar os assuntos teóricos vistos em sala de aula com o mundo físico. Assuntos estes que vão além da grade curricular. Como a disciplina de Matemática possui um currículo bastante extenso para os alunos do Ensino Médio, os professores podem ficar limitados ao ensinar os conteúdos do currículo escolar, o que impossibilita a abordagens de novas temáticas durante o ano letivo. Nesse sentido, abordar a Geometria Fractal na escola pode contribuir para o ensino e aprendizagem.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo geral

- Apresentar de forma introdutória o conceito e algumas aplicações da Geometria Fractal para alunos do 3º ano do Ensino Médio.

1.2.2 Objetivos específicos

- Diferenciar Geometria Euclidiana e Geometria Fractal;
- Definir algumas propriedades elementares da Geometria Fractal e apresentar imagens de fractais para que seja feita sua associação com entes da natureza;
- Abordar algumas propriedades e aplicações da Geometria Fractal;

1.3 Justificativa

Os alunos do ensino médio têm um contato maior com a geometria euclidiana, que é constituída sobre os objetos primitivos: ponto, reta e plano, destes derivando todos os demais, tais como o espaço tridimensional, os objetos geométricos como círculos, figuras planas, polígonos, poliedros e etc. Os objetos primitivos da geometria euclidiana, não possuem demonstração, contudo, são definidos por algumas características que possibilitam sua identificação, sendo a geometria construída a partir dos postulados sobre eles. Vale ressaltar que a geometria euclidiana tem sido de grande valia para o ser humano ajudando-o a compreender a natureza e modelar problemas e suas soluções.

Com isso, os estudantes acabam por não ver outras geometrias, como por exemplo, a Geometria Fractal, que é aplicável em diversas áreas do conhecimento, sobretudo é encontrada em elementos observados na natureza, que possuem as propriedades dos fractais.

Sua característica é a autossimilaridade com o todo, a complexidade infinita e faz-se presente na natureza, nas nuvens, montanhas, plantas, animais, nos rios entre outros elementos. Segundo a BNCC[1] (2018, p. 116), ao se tratar do ensino para a Educação Básica, a Matemática pode ser vista como uma fonte de modelos para os fenômenos que nos cercam.

Além disso, o estudo da Geometria Fractal pode ser associado ao estudo das sequências, sobretudo das progressões geométricas (PG) que fazem parte do currículo do 1º Ano do Ensino Médio. Portanto, o contato com os fractais pode enriquecer as aulas de matemática, seja pela curiosidade por ser um tema diferente, ou pela possibilidade de explorar-se problemas de matemática diferenciados.

Assim, é importante ressaltar que a associação entre o mundo físico e o mundo abstrato da matemática pode ser comparada a uma via de mão dupla. Nesse sentido, é importante mostrar para o aluno que a Geometria Fractal é uma das representações matemáticas que mais se assemelha ao mundo real. Diante do exposto, abordar estes temas nas aulas, pode motivar os alunos ao gosto pela matemática, e aguçar a sua curiosidade por novos conhecimentos dada a diversidade de aplicações interessantes que a Geometria Fractal pode potencializar.

[1] Base Nacional Comum Curricular.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Olhando ao redor, o ser humano consegue relacionar as formas geométricas da matemática com o espaço que o cerca, tornando assim a geometria parte integrante do seu cotidiano. Ao observar um prédio durante um passeio pela cidade, uma flor, ou até mesmo o formato de um campo de futebol, é possível identificar elementos geométricos.

Por isso, o estudo da geometria é indispensável para o pleno desenvolvimento do ser humano, pois ajuda na compreensão do mundo, desenvolve o raciocínio lógico e proporciona um melhor entendimento de outras áreas do conhecimento (PIASESKI, 2010, p. 6).

Em relação ao surgimento da geometria, acredita-se que remonta à origem da civilização humana. Alguns registros podem ser encontrados em museus com escritos antigos sobre temas geométricos, oriundos das civilizações egípcia, suméria e babilônica, muito anteriores aos gregos. De acordo com Pinho, Batista & Carvalho (2010, p. 9)

> […] a própria palavra Geometria nos fornece alguns indícios sobre as motivações fundamentais que os povos antigos tiveram para o estudo desta disciplina. Um dos motivos teria sido o desenvolvimento da agricultura, que precisou de demarcação de terras e posteriormente avaliar a produtividade através do cálculo da área de um determinado terreno. Logo, a questão do armazenamento motivou o estudo do cálculo de volumes. Um outro motivo teria sido a arquitetura, pois a construção de grandes monumentos, como templos e pirâmides, além de um colossal esforço humano, requereu o uso de técnicas geométricas. Finalmente, motivações religiosas fizeram com que os povos olhassem para o céu e se preocupassem com o movimento dos astros. A astronomia, portanto, pode ter sido uma terceira fonte para as origens da geometria na Antiguidade. (PINHO, BATISTA & CARVALHO, 2010, p. 9)

A palavra geometria tem origem na Grécia Antiga e sua formação etimológica é composta pelos termos *Geo* que significa *terra* e *métron* que significa *medida.* Portanto, geometria significa *medição de terra.* Em relação ao que representa, a geometria é um dos ramos da matemática que se ocupa da posição e forma de objetos no espaço, e além disso estuda as questões de propriedades, tamanho, e posições relativas entre figuras e objetos.

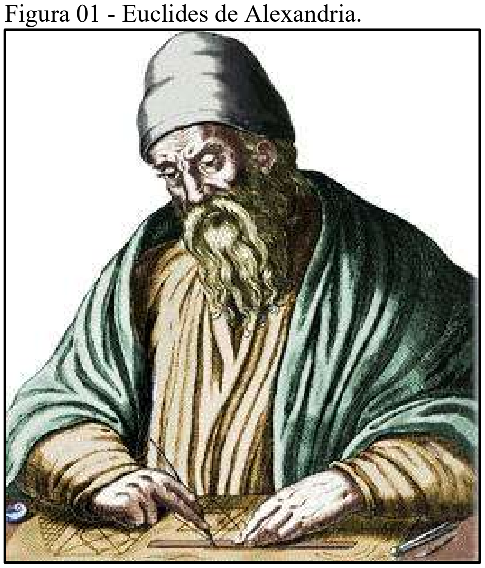
2.1 A Geometria Euclidiana e as Geometrias Não-Euclidianas

Euclides de Alexandria foi um grande matemático que viveu na Alexandria cerca de 300 a.C. Muito pouco se sabe sobre a sua vida e a personalidade e acredita-se que foi o fundador da famosa e estabelecida escola de matemática de Alexandria (BOYER, 2018, p. 87).

Além disso, supõe-se que ele tenha comandado um grupo de estudos durante o reinado de Ptolemeu I (306-283 a.C.). Euclides é conhecido como o Pai da Geometria Euclidiana.

Pinho, Batista e Carvalho (2010 p. 10) fazem menção ao trabalho de Euclides ressaltando que ele "Faz uma sistematização dos resultados geométricos mais importantes desenvolvidos até a sua época, com um rigor nas demonstrações que se tornou padrão para toda a matemática por mais de dois milênios."

Figura 01 - Euclides de Alexandria.



Fonte: Infoescola, 2022.

Euclides escreveu "Os Elementos", uma das obras mais renomadas da história da matemática, e assim, trazendo resultados já conhecidos de outros matemáticos; não somente de geometria, mas ainda de aritmética e álgebra, "Ele se tornou notável já que sua obra é considerada o primeiro tratado científico, no qual encontramos conceitos fundamentais da matemática, apresentados de forma revolucionária" (CARVALHO, 2017, p. 4). Adiante são apresentadas as definições de Euclides em uma lista de cinco postulados e cinco noções comuns.

- Postulados de Euclides:

1) Pode-se traçar uma reta de qualquer ponto a qualquer ponto;

2) É possível prolongar uma reta finita continuamente em uma linha reta de maneira única;

3) Pode-se descrever um círculo com qualquer centro e qualquer raio;

4) Todos os ângulos retos são iguais;

5) Se uma reta cortando duas retas faz os ângulos interiores de um mesmo lado menores que dois ângulos retas, se prolongadas indefinidamente, se encontram desse lado em que os ângulos são menores que dois ângulos retos.

- Noções comuns:

1) Coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais entre si;

2) Se iguais são somados a iguais, os totais são iguais;

3) Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais;

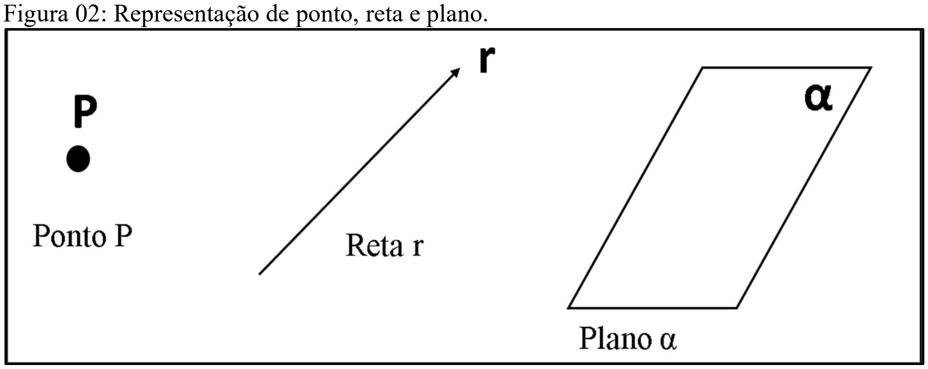
4) Coisas que coincidem uma com a outra são iguais uma a outra;

5) O todo é maior que a parte.

Como o próprio nome evidencia, na geometria das figuras planas os objetos de estudo são o triângulo, o quadrado, o trapézio, o retângulo e todas as outras formas geométricas planas.

A Geometria Euclidiana tem como elementos básicos: o ponto, a reta e o plano, os quais são denominados "entes primitivos". Os pontos e as retas serão representados, respectivamente, por letras maiúsculas e minúsculas do nosso alfabeto, enquanto um plano será geralmente representado por uma letra grega.

Figura 02: Representação de ponto, reta e plano.



Fonte: O autor, 2022.

É notório perceber que o conteúdo geométrico abordado nas escolas de ensino fundamental e médio se resumem, basicamente, ao estudo das Geometria Euclidiana, Geometria Espacial e Geometria Analítica. As Geometrias não Euclidianas geralmente são pouco abordadas.

Logo, a Geometria Euclidiana apresenta suas limitações, o que acaba não contemplando o estudo de todas as superfícies e objetos ao nosso redor, como por exemplo, o estudo da esfera e sua associação com o globo terrestre. Por isso, há a necessidade de estudar as Geometrias Não Euclidianas (esférica, hiperbólica, fractais, etc.), para que seja feita uma melhor análise dos objetos em três dimensões.

É na Geografia que os estudantes entram em contato com conceitos como: coordenadas geográficas, latitude, longitude, paralelos, meridianos entre outros. Junto com a Geografia, podemos inserir o conceito do estudo matemático de superfícies não planas. Vale salientar que é importante a inserção dos conceitos das Geometrias Não Euclidianas associadas às aplicações no nosso cotidiano, dessa maneira, conceitos em princípio abstratos aos olhos dos alunos tornam-se mais fáceis de serem compreendidos. Assim, a curiosidade e o prazer por se estudar matemática são aguçados. E pode-se utilizar tecnologias que nos trazem comodidade e conforto (CARVALHO, 2017, p. 27).

Na Tabela 01, conforme os conceitos básicos, podemos demonstrar as principais diferenças entre as Geometrias Euclidiana, Hiperbólicas e Esféricas.

Tabela 01**:** Principais diferenças entre a Geometria Euclidiana e a Não Euclidiana.

CONCEITOS BÁSICOS	**GEOMETRIA EUCLIDIANA**	**GEOMETRIA HIPERBÓLICA**	**GEOMETRIA ESFÉRICA**
Dados uma reta r e um ponto P exterior a r	É possível traçar somente uma reta por P paralela a r	É possível traçar pelo menos duas reta por P paralela a r	Não é possível traçar nenhuma reta por P paralela a r
Interseção de duas retas distintas	É um ponto	É um ponto	São dois pontos antípodas (pontos diametralmente opostos)
Duas retas distintas perpendiculares a uma terceira	São paralelas	São paralelas	Se interceptam
A soma dos ângulos internos de um triângulo	É igual a dois ângulos retos	É menor que dois ângulos retos	É maior que dois ângulos retos

Fonte: Carvalho, 2017, p. 17.

O próximo tópico irá tratar mais a fundo da Geometria Fractal, uma das geometrias não euclidianas, e que é o objeto de estudo deste trabalho.

2.2 Benoit Mandelbrot

Benoit Mandelbrot nasceu em Varsóvia, na Polônia, em 1924, e cresceu em diferentes cidades da Europa. Ele estudou matemática na França e nos Estados Unidos e trabalhou como pesquisador na Corporação Internacional de Máquinas de Negócios (IBM) por muitos anos. Sua principal obra foi o desenvolvimento da teoria dos fractais, uma nova forma de entender a geometria e a natureza do mundo em nossa volta.

Segundo os autores Paula e Souza (2017, p. 2), o termo Geometria Fractal, se deve a Mandelbrot, sendo este um dos precursores nos estudos desses objetos e suas propriedades, sendo o termo *fractal* derivado do latim (do adjetivo *fractus*) cujo significado está ligado ao verbo *frangere* que significa quebrar ou criar fragmentos.

A contribuição de Mandelbrot para a matemática dos fractais é muito vasta e inclui a definição de objetos fractais, a descoberta do conjunto de Mandelbrot e a popularização do conceito de auto semelhança. Seu trabalho teve grande impacto em diversas áreas, como por exemplo, a ciência da computação, a física, a biologia, a economia e a arte. Mandelbrot faleceu em 2010, deixando um legado impressionante para a matemática e para a ciência em geral.

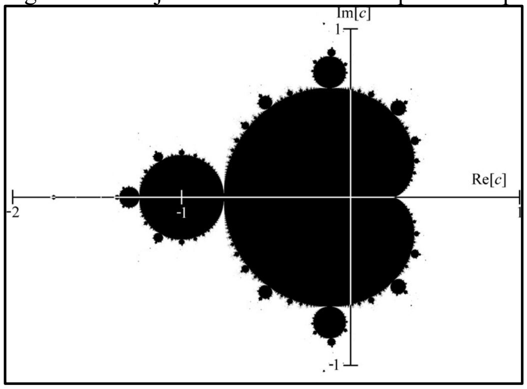
Figura 03: Benoit Mandelbrot.

Fonte: http://editaedi.ufpa.br/ebooks/artematica/conjunto-mandelbrot.html., 2023.

O conjunto de Mandelbrot é um conjunto de pontos no plano dos complexos que exibe uma estrutura fractal interessante. Ele é definido por meio de um processo iterativo, que envolve a aplicação repetida de uma função em cada ponto do plano.

A função utilizada no processo iterativo é chamada de função iterativa de Mandelbrot e é definida da seguinte forma: $\boldsymbol{z_{n+1} = z_n{}^2 + c}$, onde $\boldsymbol{z}$ representa um número complexo no plano, $\boldsymbol{c}$ é um número complexo constante e $\boldsymbol{n}$ é o número de iterações.

Figura 04: Conjunto de Mandelbrot no plano complexo.

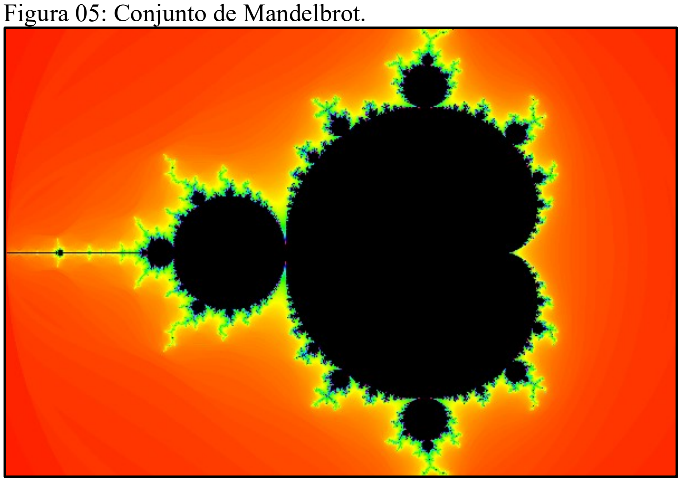


Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Conjunto_de_Mandelbrot, 2023

A ideia principal do conjunto de Mandelbrot é determinar quais pontos do plano dos complexos tendem a convergir para um valor finito ao aplicar o processo iterativo, e quais pontos divergem e tendem ao infinito.

Ao aplicar o processo iterativo em cada ponto do plano, é possível visualizar o conjunto de Mandelbrot, que é representado graficamente como uma imagem colorida ou em preto e branco. Os pontos que tendem ao infinito são coloridos, enquanto os pontos que convergem para um valor finito permanecem em preto.

Figura 05: Conjunto de Mandelbrot.



Fonte: https://www.codingame.com, 2023.

Uma característica interessante do conjunto de Mandelbrot é a presença de estruturas fractais em sua imagem. Por fractais, entende-se padrões que se repetem em diferentes escalas, exibindo uma complexidade infinita. No caso do conjunto de Mandelbrot, as estruturas fractais surgem devido à forma como os pontos divergem ao serem iterados infinitamente.

Essas estruturas fractais são uma das razões pelas quais o conjunto de Mandelbrot é tão fascinante e popular, tanto na matemática quanto na arte visual. Ele mostra como mesmo uma função aparentemente simples pode gerar um conjunto com uma riqueza de detalhes infinita.

2.3 Leonardo Fibonacci

Leonardo Fibonacci foi um matemático italiano que viveu no século XIII. Ele é conhecido por introduzir a numeração hindu-arábica na Europa e por suas contribuições em diversas áreas da matemática.

Figura 06: Leonardo Fibonacci.

Fonte: Amoras Alex, 2014.

Fibonacci nasceu em Pisa por volta de 1170 e viajou extensivamente como comerciante, o que lhe permitiu aprender com diferentes culturas e matemáticos. Ele ficou fascinado com a matemática indiana e foi o primeiro a trazer seus conceitos aritméticos para o ocidente, incluindo o uso dos algarismos 0 a 9 e o sistema posicional.

Ele também é famoso pelo seu trabalho com a sequência de Fibonacci, é uma série numérica em que cada número é a soma dos dois anteriores: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, etc. Essa série tem propriedades matemáticas interessantes e pode ser associada a proporções presentes na natureza, como a chamada razão áurea, é representada pela letra grega (Phi) φ, cujo valor é aproximadamente 1,618. Essa proporção está relacionada a padrões harmônicos e estéticos, e é frequentemente encontrada em formas orgânicas como conchas, ramificações de árvores, em espirais de sementes e galáxias, etc. Segundo Amoras (2014) colaborando com essa ideia

> [...] São muitas as aparições dos números de Fibonacci em nosso cotidiano e na maioria das vezes é fácil perceber suas manifestações, para muitos estudiosos essa sequência pode até parecer enigmática ou mística, mas para a matemática e a simples comprovação de que a matemática está presente em nossa história e muito mais em nosso futuro (Amoras, 2014, p. 50)

A Geometria Fractal tem sido uma ferramenta útil para entender esses padrões autossimilaridade e sua complexidade infinita, que muitas vezes excede a capacidade da geometria euclidiana tradicional.

2.4 A Geometria Fractal

O desenvolvimento da matemática e seus desdobramentos, em muitos casos, encontra-se atrelado a aplicações que ampliam e aperfeiçoam o modo de vida das pessoas e explicam diversos fenômenos que ocorrem à sua volta. Neste sentido, existe um interessante tópico da matemática que consegue apresentar uma modelagem geométrica de diversos elementos encontrados na natureza, servindo como suporte para a explicação de fenômenos de diversas áreas, como medicina, engenharia, física, química, biologia, geografia, dentre outras diversas áreas do conhecimento (MENDONÇA, 2016, p. 12).

Segundo Mendonça (2016, p. 12) os fractais são formas geométricas elementares, cujo padrão pode repetir-se indefinidamente, gerando complexas figuras que preservam em cada uma de suas partes a singularíssima propriedade de representar o todo.

Dentre as características dos fractais podemos destacar a complexidade infinita, que é uma propriedade dos fractais que significa que nunca conseguiremos representá-los completamente, pois a quantidade de detalhes é infinita. Sempre existirão reentrâncias e saliências cada vez menores. Outro ponto importante é a autossimilaridade, onde um fractal costuma apresentar cópias aproximadas de si mesma em seu anterior. Um pequeno pedaço é similar ao todo. Visto em diferentes escalas a imagem de um fractal parece similar.

Logo, o conceito de autossemelhança pode ser dividido em duas condições: autossemelhança exata e a aproximada. A autossemelhança exata é encontrada apenas nas figuras geradas através de processos matemáticos, em que o conjunto total é formado por pequenas cópias idênticas a ele. A autossemelhança aproximada pode ser encontrada em objetos da natureza, pois estes apresentam partes com estruturas semelhantes ao todo, porém não de maneira exata, ou seja, de modo aproximado (NUNES, 2006, p. 29).

Figura 07: Representação de autossemelhança.

Fonte: https://escolakids.uol.com.br/matematica/fractais.htm, 2022.

Conforme mencionado por Silva (2015, p. 27) “Na natureza, podemos encontrar diversas formas que se “encaixam” na definição de fractais, como por exemplo, uma couve-flor, ou até mesmo o sistema pulmonar. Estas formas que antes dos fractais eram modeladas através de figuras da geometria euclidiana.”

Figura 08: Fractais representados pela natureza: couve-flor e um sistema pulmonar.

Fonte: Silva, 2015.

Para as definições e conceitos a seguir, foi usado como base os trabalhos de Cauê Silva (SILVA, 2015), Raquel Nunes (NUNES, 2006), Yara Freire Rabay (RABAY, 2013) que expressam de forma sucinta a temática dos fractais. Serão apresentados alguns exemplos de fractais e suas características.

2.5 Curva de Peano

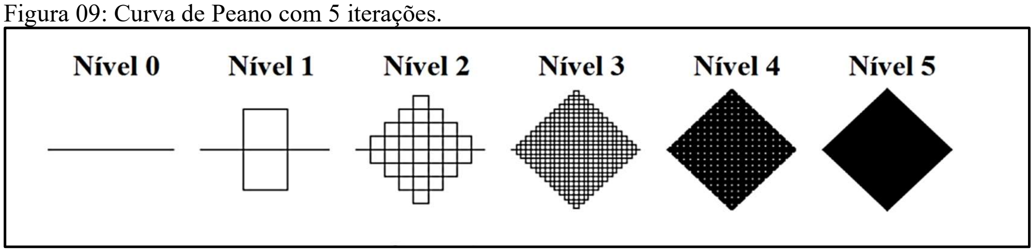
A Curva de Peano publicada em 1890 foi concebida pelo matemático Giuseppe Peano (1858 – 1932) em um de seus estudos sobre como cobrir a superfície plana retangular. A curva pode ser construída da seguinte forma:

i) Considere um segmento de reta;

ii) Divida o segmento em três partes iguais e utilize o terço médio como base para construir dois quadrados, um no plano superior e outro no plano inferior;

iii) Repita o item ii) indefinidamente em cada um dos segmentos seguintes, inclusive os segmentos representados pelos lados dos quadrados.

Figura 09: Curva de Peano com 5 iterações.



Fonte: Rabay, 2013.

A Figura 09 apresenta a construção da Curva de Peano após 5 iterações. Devido à rapidez de preenchimento do espaço, o que se relaciona com a dimensão de Hausdorff, pode-se observar, na escala em que a figura é apresentada, que temos praticamente o espaço preenchido de um quadrado cuja diagonal mede exatamente o segmento inicial.

2.6 Curva de Koch

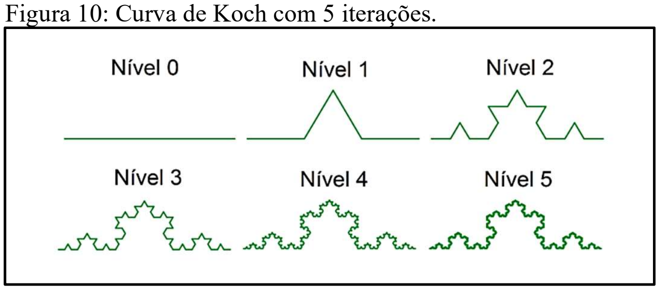
Curva de Koch foi publicada em 1904 pelo matemático sueco Helge Von Koch (1870 – 1924), conhecido pelo seu estudo sobre construção de curvas contínuas sem tangentes em nenhum de seus pontos. Outro trabalho relevante é conhecido como Ilhas de Koch, pois estas são construções feitas a partir de polígonos regulares, e merecem atenção por modelarem com mais precisão a formação cristalina dos flocos de neve. A curva é construída seguindo os passos:

i) Considere um segmento de reta;

ii) Divida o segmento em três partes iguais, retire a parte central, substituindo-a por dois segmentos de mesmo tamanho, inclinados como se fosse formar um triângulo equilátero sem base;

iii) Considere os segmentos de reta e retorne para o passo ii.

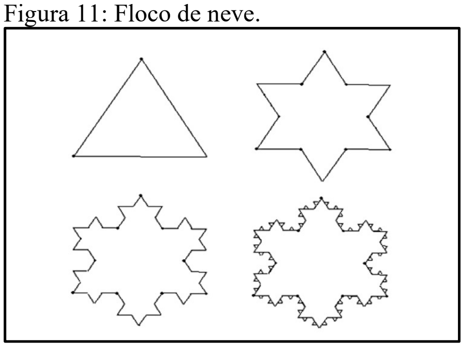
Figura 10: Curva de Koch com 5 iterações.



Fonte: Rabay, 2013.

A construção do floco de neve é feita a partir de um polígono convexo regular e em cada um de seus lados construímos a curva de Koch, vejamos um exemplo de construção a partir de um triângulo equilátero.

Figura 11: Floco de neve.



Fonte: Silva, 2015.

2.7 Conjunto de Cantor

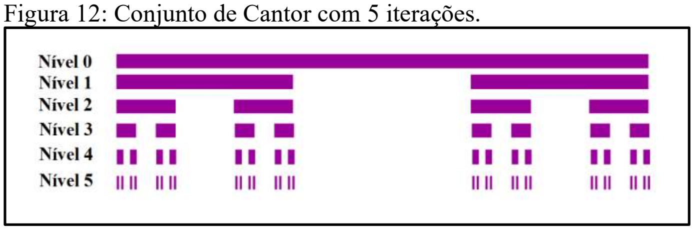
Algoritmo da função iterada:

i) Considere um segmento de reta;

ii) Divida o segmento em três partes iguais e elimine a central;

iii) Considere os segmentos de reta restantes e retorne para o Passo ii.

Figura 12: Conjunto de Cantor com 5 iterações.



Fonte: Rabay, 2013.

O conjunto de Cantor é formado por todos os pontos que não foram removidos durante esse processo infinito de remoção de intervalos. Esses pontos são os que permanecem no conjunto final.

2.8 Triângulo de Sierpinski

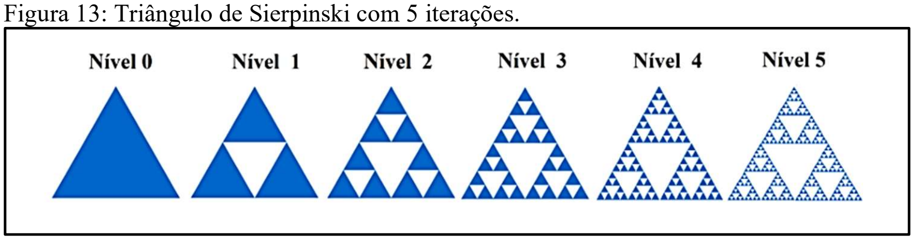
O triângulo de Sierpinski foi publicado pela primeira vez em 1916 pelo matemático polonês Waclaw Sierpinski (1882 – 1969). Sierpinski foi um matemático de grande reputação ao ponto de uma das crateras lunares receber o seu nome. A construção do triângulo de Sierpinski é feita a partir dos passos:

i) Considere um triângulo equilátero;

ii) Marque os pontos médios de cada um de seus lados e ligue-os, formando assim, quatro novos triângulos equiláteros; Remova o triângulo central;

iii) Repita o item ii) para cada um dos triângulos restantes, indefinidamente.

Figura 13: Triângulo de Sierpinski com 5 iterações.



Fonte: Rabay, 2013.

2.9 Tapete de Sierpinski

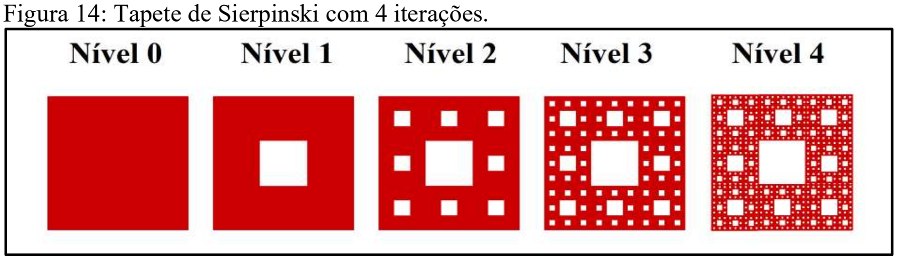
Algoritmo da função iterada:

i) Considere um quadrado;

ii) Divida o quadrado em nove quadrados, retire a parte central;

iii) Considere os quadrados restantes e retorne para o Passo ii.

Figura 14: Tapete de Sierpinski com 4 iterações.



Fonte: Rabay, 2013.

A Figura 14 mostra a construção do Tapete de Sierpinski após 4 iterações. Podemos observar que a linha central do Tapete de Sierpinski representa o Conjunto de Cantor (Figura 12).

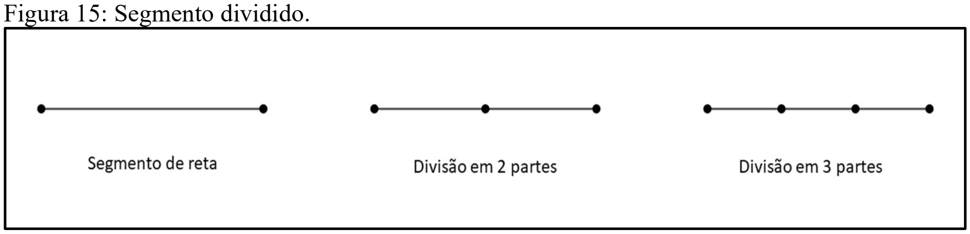
2.10 Geração de objetos auto similares e a dimensão dos fractais

A Geometria Fractal também permite desenvolver trabalhos para desenvolver atividades envolvendo logaritmos associando-se a problemas de determinar a dimensão do fractal. (NUNES, 2006; SILVA, 2015; RABAY, 2013). Como um fractal é um objeto matemático de dimensão não inteira, geralmente problemas envolvendo a sua dimensão recaem no uso de logaritmos, o que pode ser utilizado também no 1º Ano do Ensino Médio como uma aplicação dos logaritmos.

Como exemplo de geração de fractais observemos algumas situações de divisões de um objeto em objetivos menores, mantendo a similaridade com o objeto inicial: um segmento de reta com dimensão um, um quadrado com dimensão dois e um cubo com dimensão três, podem ser repartidos em objetos autossimilares, ou seja, possuem a propriedade de autossimilaridade.

1) Um segmento de reta, podemos dividir em duas partes iguais, em três partes iguais:

Figura 15: Segmento dividido.



Fonte: O autor, 2022.

Na Tabela 02, organizando essas informações em um quadro tem-se:

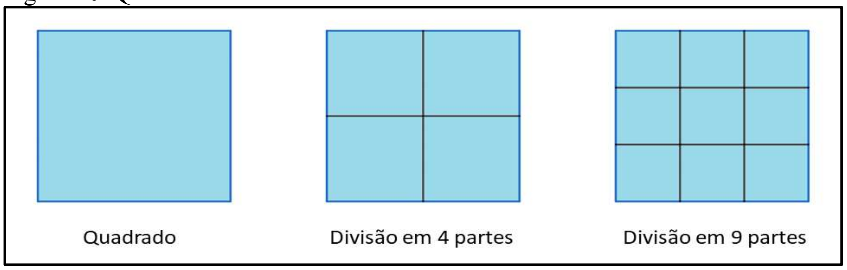
Tabela 02: Reta- relação entre partes geradas e o fator de redução.

Peças geradas	Fator de redução	Relação entre n e r
n	r	$n = r^1$
1	1	$1 = 1^1$
2	2	$2 = 2^1$
3	3	$3 = 3^1$

Fonte: Rabay, 2013.

2) Dado um quadrado, pode-se dividir cada um de seus lados em duas partes, obtendo assim quatro novos quadrados; ou dividindo em três partes, obtendo assim nove, novos quadrados congruentes (Ver a Figura 16).

Figura 16: Quadrado dividido.



Fonte: O autor, 2022.

Veja a Tabela 03 com estas informações organizadas em um quadro:

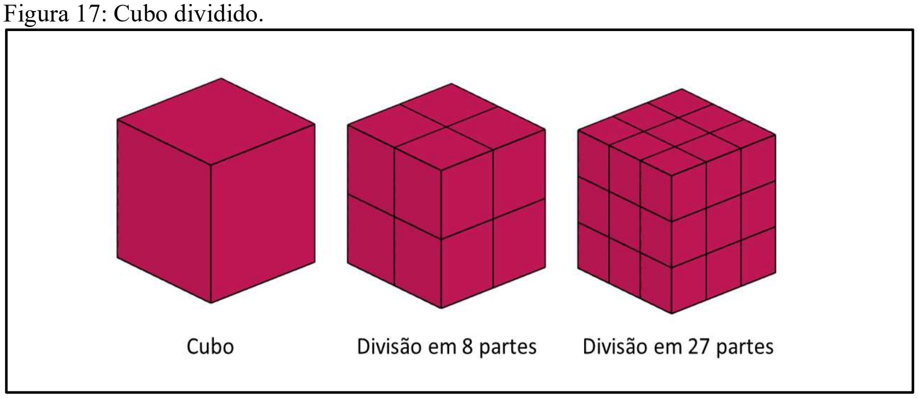
Tabela 03: Quadrado- relação entre partes geradas e o fator de redução.

Peças geradas	**Fator de redução**	**Relação entre n e r**
n	r	$n = r^2$
1	1	$1 = 1^2$
4	2	$4 = 2^2$
9	3	$9 = 3^2$

Fonte: Yara Silvia Freire Rabay (RABAY, 2013, p. 40).

3) Considerando um cubo, é possível dividir cada lado em duas partes iguais, formando assim, oito novos cubos. Dividindo os lados em três partes iguais, formam-se vinte e sete novos cubos, conforme ilustrado na Figura 17.

Figura 17: Cubo dividido.



Fonte: O autor, 2022.

Na Tabela 04, organizando essas informações, tem-se:

Tabela 04: cubo relação entre partes geradas e o fator de redução

Peças geradas	Fator de redução	Relação entre n e r
n	r	$n = r^3$
1	1	$1 = 1^3$
8	2	$8 = 2^3$
27	3	$27 = 3^3$

Fonte: Rabay, 2013.

Observa-se que cada parte das divisões é autossimilar ao todo em uma escala menor, ou seja, [...] “nos três exemplos, segmento de reta, quadrado e cubo, independente da dimensão D, quaisquer que sejam as divisões autossimilares temos que a relação entre a quantidade de peças geradas n e o fator de redução r é dada por $n = r^D$ ” (RABAY, 2013, p. 41). Em que n é o número de peças, r é o fator de redução e D é a dimensão.

Podemos calcular as dimensões dos fractais usando esta expressão:

$$n = r^D$$

Aplicando a propriedade de logaritmo ambos os lados, obtemos:

$$log\, n \ = \ log\, r^D$$

$$log\, n \ = \ D \cdot log\, r$$

$$D = \frac{log\, n}{log\, r}$$

A equação nos fornece a dimensão de figuras autossemelhantes, fractais ou não fractais. Na Curva de Peano, (Ver a Figura 09) tem no primeiro nível um coeficiente de redução r igual a 3 e o número de peças gerada n igual a 9, portanto:

$$D \ = \frac{log\, 9}{log\, 3} = \ 2$$

Este resultado é bastante interessante, pois tem-se uma curva cuja dimensão é igual a 2, quando sabemos que na geometria euclidiana as curvas têm dimensão 1. Daí segue uma das grandes e mais importantes diferenças da Geometria Fractal em relação a outras geometrias: as dimensões dos objetos não são as mesmas das geometrias euclidianas, e geralmente são dimensões fracionadas, ou seja, não inteiras, um dos motivos do nome “fractal”.

Na tabela a seguir foram calculadas as dimensões da Curva de Koch, do Conjunto de Cantor, do Triângulo de Sierpinski e do Tapete de Sierpinski:

Tabela 05: Cálculo da dimensão fractal de vários objetos

Fractal	**Peças Geradas**	**Fator de redução**	**Dimensão do fractal**
-	n	r	$D = \frac{\log n}{\log r}$
Curva de Koch	4	3	$D = \frac{log\, 4}{log\, 3} \approx 1{,}26$
Conjunto de Cantor	2	3	$D = \frac{log\, 2}{log\, 3} \approx 0{,}63$
Triângulo de Sierpinski	3	2	$D = \frac{log\, 3}{log\, 2} \approx 1{,}58$
Tapete de Sierpinski	8	3	$D = \frac{log\, 8}{log\, 3} \approx 1{,}89$

Fonte: Rabay, 2013.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Em relação à metodologia utilizada, esta pesquisa teve uma abordagem predominantemente qualitativa, mas também quantitativa, tendo como objetivo apresentar a Geometria Fractal de maneira acessível para alunos do ensino médio. Inicialmente foi feito um levantamento bibliográfico sobre a temática, para a construção do referencial teórico. Para isso foi realizado um levantamento dos estudos concludentes, publicados, especialmente em livros e artigos científicos sobre o tema Geometria Fractal na educação básica.

Considerando que a abordagem qualitativa, enquanto exercício de pesquisa, não se apresenta como uma proposta rigidamente estruturada, ela permite que a imaginação e a criatividade levem os investigadores a propor trabalhos que explorem novos enfoques. (GODOY, 1995, p. 4).

Na discussão dos resultados foi analisada uma proposta na forma de construção, promovendo uma análise de como os fractais estão presentes no cotidiano do aluno, por meio de comparações com elementos da natureza, associando suas propriedades com as próprias dos fractais. As atividades foram aplicadas a alunos do 3º Ano do Ensino Médio do Instituto Federal do Amapá. A escolha destes alunos se deu pelo fato de já terem visto os conceitos de sequências numéricas no 1º Ano (PA e PG), e de a geometria plana fazer parte do currículo do 2° Ano do Ensino Médio. Assim, foi possível associar os dois temas para desenvolver as atividades com os fractais, fazendo uma ressignificação e revisão de temas vistos pelos alunos participantes em séries anteriores.

3.1 Local de pesquisa

A realização das atividades foi no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amapá (IFAP), que é uma instituição pública de ensino médio e superior que se encontra localizado na Rodovia BR-210, Km 03, s/n - Brasil Novo na cidade de Macapá, na região Norte do Brasil. O Campus funciona em três turnos: matutino, vespertino e noturno. O campus oferece diversas opções de cursos técnicos integrados ao ensino médio, cursos técnicos subsequentes, cursos de graduação em diversas áreas do conhecimento, além de pós-graduação.

Figura 18: Entrada do IFAP – Campus Macapá.

Fonte: O autor.

As instalações do IFAP de Macapá são modernas e bem equipadas, contando com salas de aula amplas e climatizadas, laboratórios de informática, biblioteca, auditório e áreas de convivência para os estudantes. O campus também dispõe de uma ampla estrutura esportiva e ginásio de esportes.

Os cursos oferecidos pela instituição de Macapá são reconhecidos pelo Ministério da Educação e apresentam uma excelente qualidade acadêmica, formando profissionais qualificados e aptos a atuarem no mercado de trabalho. Além disso, a instituição incentiva a pesquisa e a extensão, possibilitando aos estudantes a participação em projetos e atividades que contribuam para a sua formação integral.

O Campus de Macapá é, portanto, uma importante instituição de ensino superior na região Norte do país, oferecendo oportunidades de formação acadêmica de qualidade a jovens e adultos que buscam aprimorar seus conhecimentos e competências para o mercado de trabalho.

3.2 Sujeitos participantes

A pesquisa foi realizada com uma turma do 3° Ano do Ensino Médio, do Curso Técnico de Nível Médio em Estradas do IFAP, todos na faixa etária de 16 a 19 anos de idade, indicando que eles estão em uma idade adequada para a conclusão do ensino médio, o que foi essencial para entender os resultados da intervenção realizada com esse grupo.

A Geometria Fractal pode ser trabalhada dentro da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) por meio do eixo temático de Matemática, no componente curricular de Geometria, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio.

É importante ressaltar que a BNCC não especifica de forma detalhada como cada conteúdo deve ser trabalhado, mas oferece diretrizes e competências a serem desenvolvidas pelos estudantes. É responsabilidade dos professores adaptarem as estratégias de ensino para atingir os objetivos propostos e garantir a aprendizagem dos estudantes de acordo com a realidade de cada contexto escolar.

3.3 Descrição dos encontros de aplicação da pesquisa

Esta pesquisa foi aplicada com intervenções no formato de oficinas. Cada oficina teve uma importância fundamental para revisar e introduzir aos alunos alguns conceitos relevantes sobre geometria euclidiana e fractal. Logo, para que os assuntos fossem abordados de forma mais clara e proveitosa, a oficina foi ministrada em dois momentos.

3.3.1 O primeiro encontro

O primeiro dia de oficina ocorreu no dia 11 de maio de 2023, na sala 17 do bloco B do IFAP, *campus* Macapá, com a participação de 11 alunos. Neste primeiro momento foi feita uma revisão sobre a geometria euclidiana e a fractal, permitindo uma comparação entre essas duas geometrias, enfatizando suas principais diferenças e particularidades.

Após a abordagem do assunto, foi feita a exposição de uma couve-brócolis, como exemplo de um fractal presente na natureza. Foi uma maneira interessante e lúdica de demonstrar a aplicação dos conceitos aprendidos na prática para os alunos (Figura 19).

Figura 19: Apresentação da teoria e exposição do couve-brócolis.

Fonte: O autor, 2023.

Além de mostrar objetos físicos, como a couve-flor, a utilização de dispositivos de mídia também foi crucial para o melhor entendimento do tema, pois com o uso do computador e do projetor multimídia, foi possível apresentar para os alunos de forma clara e objetiva exemplos de outros fractais encontrados na natureza, tais como: galáxias, nuvens, raios, folhas e etc.

O segundo fractal trabalhado na oficina, foi a construção do triângulo Sierpinski e de um cartão fractal pelos próprios alunos, com a orientação do autor deste trabalho, conforme mostra a Figura 20.

Figura 20: Construção do Triângulo de Sierpinski e cartão fractal.

Fonte: O autor, 2023.

Esta atividade foi muito importante para que os alunos pudessem visualizar na prática os conceitos teóricos abordados na oficina ganharem vida, como auto similaridade, e ver o fractal ser gerado no mundo real, a partir da manipulação de materiais concretos, como a folha de papel, régua, lápis e tesoura. Isso proporcionou uma experiência prática e a oportunidade de visualizar os padrões e estruturas fractais de forma concreta.

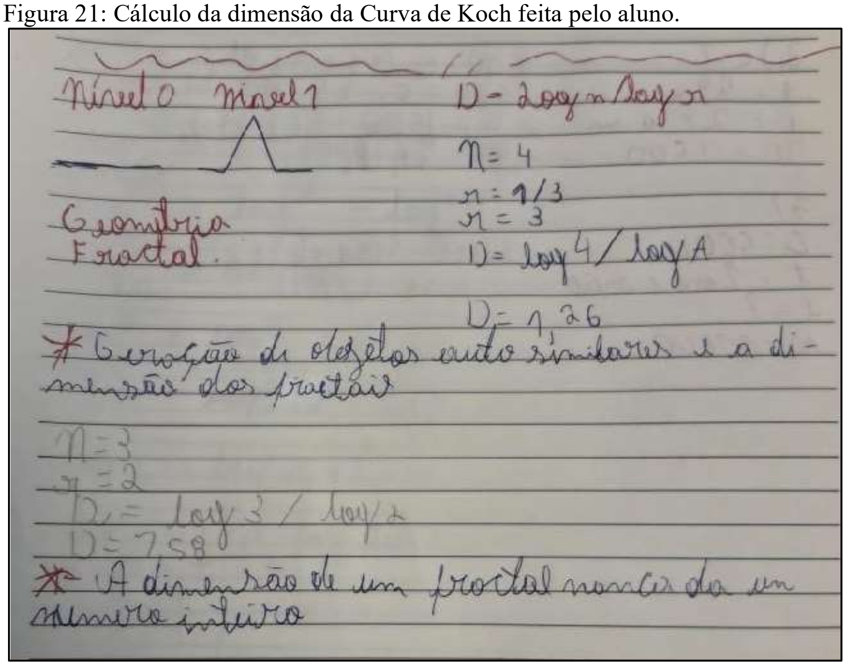
3.3.2 O segundo encontro

A segunda oficina foi realizada no dia 16 de maio de 2023, no laboratório de matemática do IFAP, *campus* Macapá, onde participaram 09 alunos, dos 11 participantes do primeiro dia. Dois dos participantes do primeiro dia não puderam comparecer na segunda oficina por terem outro compromisso pedagógico, não sendo liberados para assistir a oficina.

No segundo encontro, foi abordado o conceito geométrico de dimensão de um fractal. Foram apresentados fractais clássicos e como calcular a sua dimensão. A partir daí, foi proposto um exercício com duas questões sobre o tema para os participantes, com o intuito de que estes percebessem que os resultados obtidos no cálculo da dimensão dos fractais não podem ser números inteiros (Ver o Apêndice A).

Na Figura 21 tem-se a solução feita por um dos participantes, que procedeu da maneira descrita a seguir: dividindo um segmento de reta em três partes iguais e repetindo esse processo infinitamente, tem-se a curva fractal conhecida como curva de Koch. Nesse caso, $n = 4$ (três segmentos de reta mais um triângulo sem a base), $r = 1/3$ (cada segmento de reta é um terço menor que o segmento original) e $D = log\, 4 \,/\, log\, 3 \approx 1{,}26$.

Figura 21: Cálculo da dimensão da Curva de Koch feita pelo aluno.



Fonte: O autor, 2023.

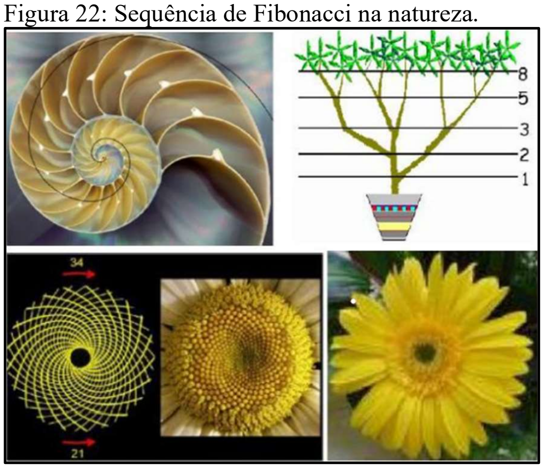
A maioria dos alunos conseguiu resolver o problema, momento em que o pesquisador indagou se os resultados calculados tinham alguma particularidade ou estranheza, isto é, se alguém tinha percebido algo diferente em relação a outros exemplos. Um dos participantes, identificado neste trabalho como Aluno A comentou da seguinte forma para o pesquisador, que transcreveu sua fala abaixo:

- **Aluno A** – *É impressão minha, mas a dimensão dos fractais não é um número exato, 1, 2, 3?*

Pode-se constatar que o sujeito percebeu que a dimensão dos fractais clássicos não são números inteiros, que conforme já descrito detalhadamente no referencial teórico deste trabalho, é justamente o que caracteriza um objeto como sendo um fractal.

Dando continuidade aos assuntos, foi apresentada de forma superficial a sequência de Fibonacci que também gera fractais, por exemplo, a espiral de Fibonacci, mostrada na Figura 22, explorando assim outros conceitos por meio de comparações de imagens da natureza com as geradas pela Geometria Fractal.

Figura 22: Sequência de Fibonacci na natureza.



Fonte: Silva, 2020.

Não foi possível aprofundar matematicamente todos os fractais mostrados, devido a limitação do tempo disponível para a realização das oficinas, visto que cada fractal têm as suas propriedades e particularidades. Contudo, as que foram trabalhadas de maneira mais detalhada, foram suficientes para que os alunos pudessem conhecer o tema e aprender os conceitos básicos para o objetivo deste trabalho.

Nesse sentido, os dois encontros em formato de oficinas foram importantes para ampliar o conhecimento dos alunos sobre geometria, em especial sobre a Geometria Fractal, despertando a curiosidade e o interesse deles pelo assunto. Além disso, permitiu uma aprendizagem mais significativa dos conceitos apresentados, já que os alunos tiveram a oportunidade de colocá-los em prática.

3.4 Coleta dos dados

Após o encerramento da segunda oficina, foi aplicado um questionário aos participantes para obtenção dos dados, com o objetivo de analisar a sua percepção sobre a temática e se ela impactou de alguma forma no aprendizado de matemática nestes dois dias. O questionário também tem o objetivo de oferecer um espaço livre para que o aluno possa externalizar suas dificuldades, anseios, experiências e até mesmo sugerir a maneira como gostaria de aprender matemática, haja visto que todas as respostas foram sigilosas, ou seja, sem a identificação do participante.

Segundo Gil (2008. p. 141) a aplicação de questionários é importante na pesquisa científica, pois pode-se defini-lo como a técnica de investigação composta por um conjunto de questões que são submetidas a pessoas com o propósito de obter informações sobre conhecimentos, crenças, sentimentos, valores, etc., onde "podemos destacar como as principais vantagens: a possibilidade de atingir um grande número de pessoas, mesmo que estejam dispersas numa área geográfica muito extensa, além de garantir o anonimato das respostas dos indivíduos entrevistados".

Para avaliar o aprendizado dos alunos, o questionário foi desenvolvido com nove perguntas entre discursivas e objetivas (Ver o Apêndice B). Sua finalidade foi demonstrar como o ensino da matemática pode ser absorvido de forma mais lúdica e interativa, o que pode estar motivando e incentivando os alunos com relação ao interesse em seus estudos em matemática.

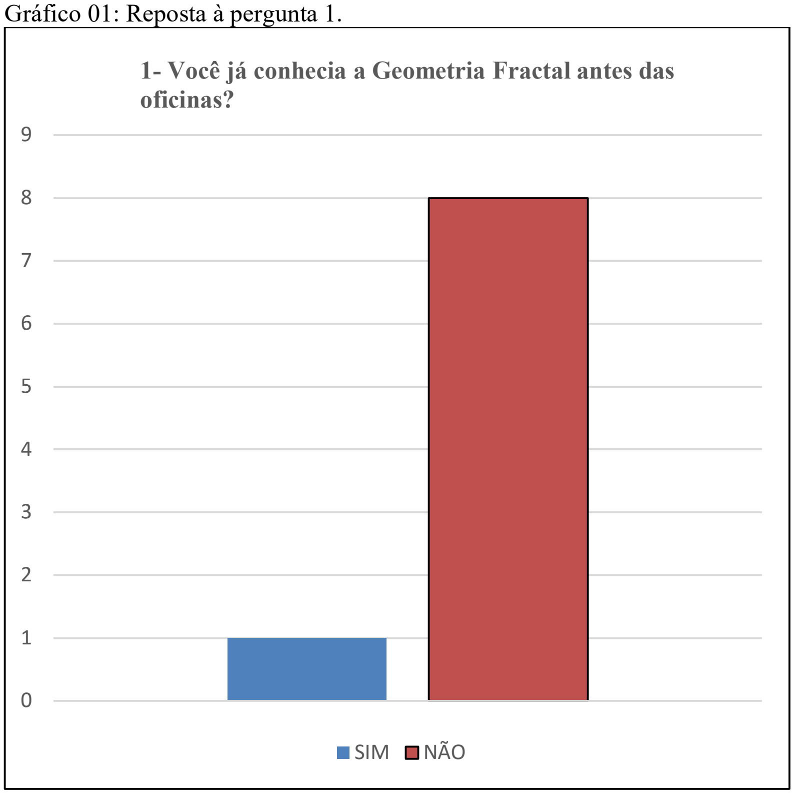
4 RESULTADOS E ANÁLISE DOS DADOS

No desenvolvimento deste trabalho, os alunos foram avaliados de forma contínua, por meio dos conhecimentos construídos e contextualizados em cada oficina, também pelo olhar atento do pesquisador, e pelas respostas transcritas no questionário aplicado ou verbalizadas durante os encontros.

4.1 Respostas às perguntas do questionário

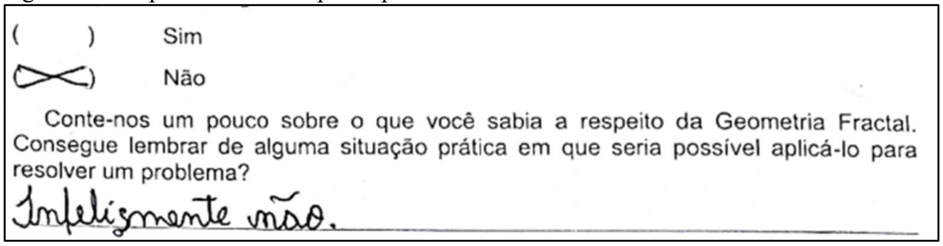
Neste tópico será feita uma análise quantitativa e qualitativa das respostas dos alunos ao questionário aplicado. Inicialmente, pode-se verificar no Gráfico 01, que a grande maioria dos alunos não tinha conhecimento prévio sobre a temática. Apenas 1 (um) aluno do total de participantes respondeu que conhecia a Geometria Fractal antes dos encontros. De acordo com este dado, 88,8% da turma nunca tinham ouvido falar sobre o tema, o que demonstra a necessidade destas abordagens nas aulas, pois assuntos como este podem potencializar o interesse dos alunos pelo estudo da matemática.

Gráfico 01: Reposta à pergunta 1.



Fonte: O autor, 2023.

Figura 23: Resposta de um dos participantes.


(   ) Sim

(X) Não

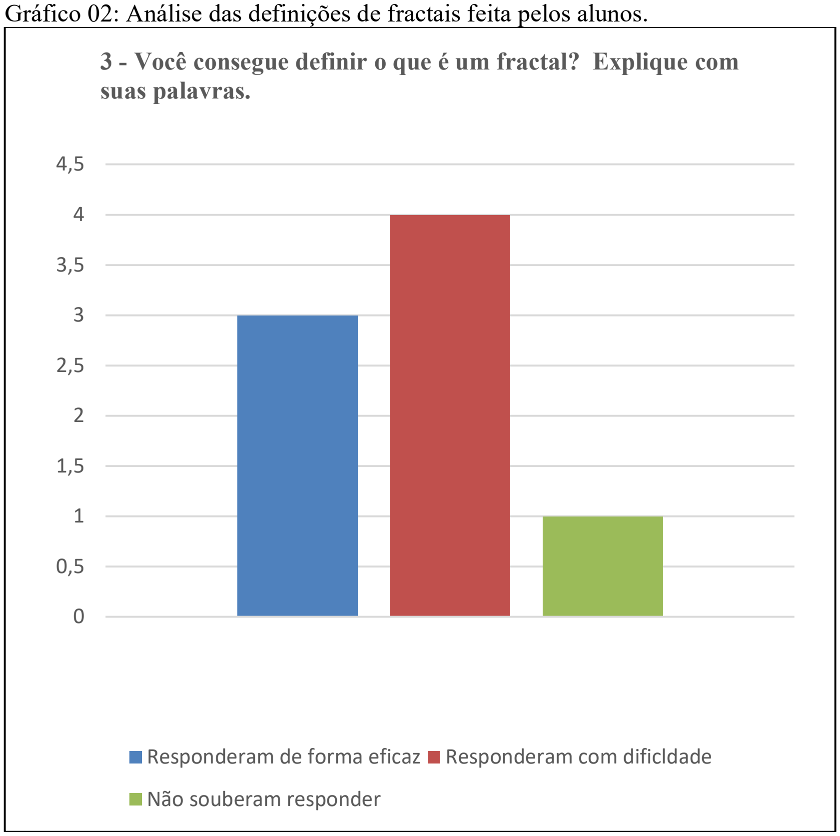
Conte-nos um pouco sobre o que você sabia a respeito da Geometria Fractal. Consegue lembrar de alguma situação prática em que seria possível aplicá-lo para resolver um problema?

Infelizmente não.

Fonte: O autor, 2023.

Isso permitiu uma melhor análise quanto ao aprendizado dos alunos com relação à didática apresentada, pois foi possível comparar o conhecimento antes e depois da oficina. Após a apresentação e definição dos tópicos, os alunos puderam conhecer e aprender um pouco mais sobre os fractais e suas similaridades com fenômenos da natureza. Sendo assim, ao término da oficina, foi pedido para que os alunos definissem com suas próprias palavras o conceito de fractal, cuja eficácia pode ser descrita no Gráfico 02 a seguir:

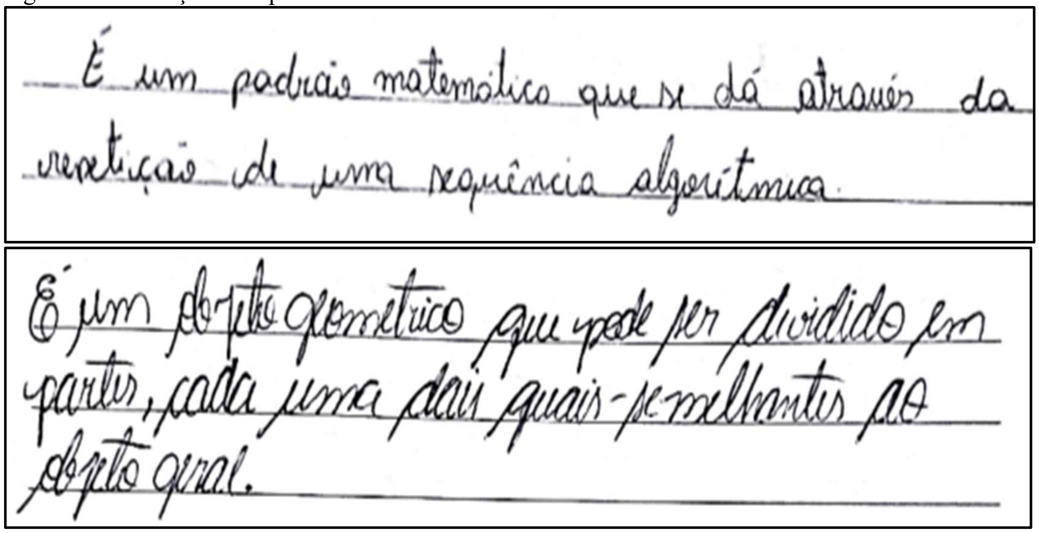
Gráfico 02: Análise das definições de fractais feita pelos alunos.



Fonte: O autor, 2023.

Com os resultados do Gráfico 02, pode-se observar que três alunos conseguiram fazer a definição do conceito de fractais de forma precisa e clara, como mostra a Figura 24.

Figura 24: Definição feita pelos estudantes.



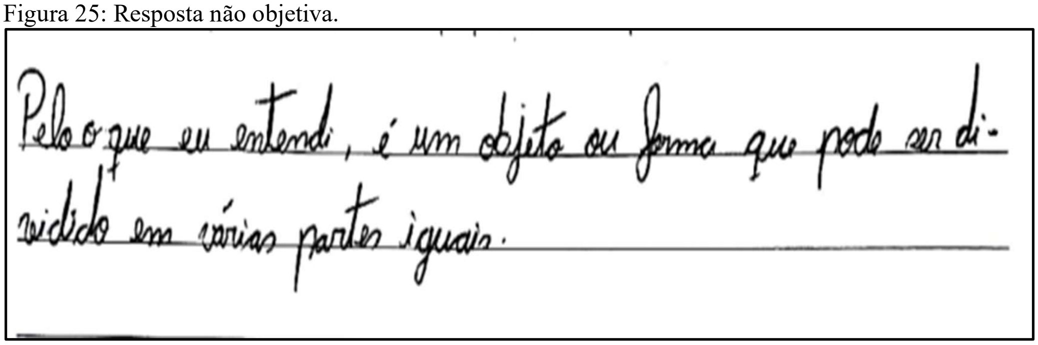
É um padrão matemático que se dá através da repetição de uma sequência algorítmica

É um objeto geométrico que pode ser dividido em partes, cada uma das quais semelhantes ao objeto geral.

Fonte: O autor, 2023

E que quatro alunos tiveram um pouco dificuldade na sua explicação, pois conseguiram repassar a ideia do conceito, porém de forma não objetiva, conforme a Figura 25. Apenas um aluno não soube responder à pergunta.

Figura 25: Resposta não objetiva.



Pelo o que eu entendi, é um objeto ou forma que pode ser dividido em várias partes iguais.

Fonte: O autor, 2023.

Isso mostra que a turma correspondeu de forma positiva à oficina, apesar das dificuldades encontradas pelos estudantes. Portanto, cabe ao professor, a elaboração de estratégias, desenvolver metodologias e adotar procedimentos, como elementos facilitadores para transformar o ensino da Matemática em algo menos complexo, mais acessível e mais prazeroso (CARNEIRO, 2018, p. 25).

- **Pergunta 4** - *Você consegue associar um fractal na natureza? Se SIM, qual?*

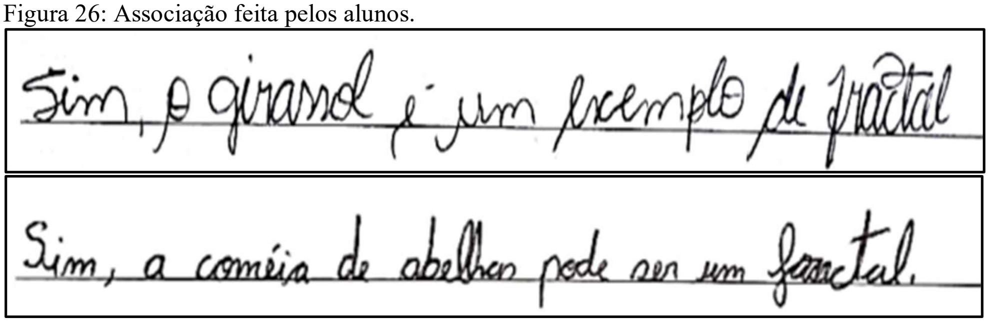
Em seguida, foi perguntado aos alunos se conseguiam associar algum fractal com fenômenos da natureza. As respostas estão esboçadas no Gráfico 03.

Gráfico 03: Sobre a associação dos fractais com a natureza.

Fonte: O autor, 2023.

Observou-se que 87% dos estudantes conseguiram fazer uma associação e exemplificar e 13% não conseguiram. Isto mostra que o processo de ensino e aprendizagem não é automático, nem segue o mesmo ritmo para todos os indivíduos, pois mesmo após os dois encontros, em que foram mostrados inclusive elementos concretos da natureza, uma parte significativa dos participantes não foi capaz de associar os fractais com elementos naturais. A Figura 26 mostra as respostas dos alunos que conseguiram exemplificar.

Figura 26: Associação feita pelos alunos.



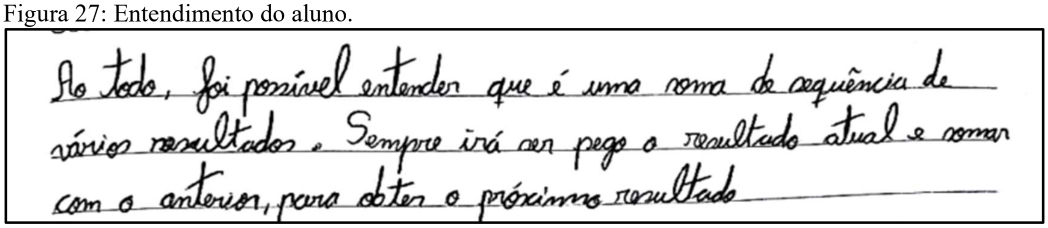
Fonte: O autor, 2023.

As respostas dos alunos apresentada na Figura 26 evidencia a importância da associação e contextualização dos assuntos pois, de acordo com a BNCC (2018, p. 298), "é imprescindível levar em conta as experiências e os conhecimentos matemáticos já vivenciados pelos alunos, criando situações nas quais possam fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos da realidade". Isso resulta das conexões que os alunos estabelecem entre os objetos estudados em sala de aula e seu cotidiano.

- **Pergunta 7** - *O que você entendeu a respeito da abordagem da sequência de Fibonacci na Geometria Fractal?*

A abordagem da sequência de Fibonacci na Geometria Fractal é uma aplicação que é gerada por um processo iterativo que segue uma regra matemática. Conforme descrito anteriormente, foram mostradas imagens para os alunos, visando gerar o padrão fractal conhecido como espiral de Fibonacci, que é frequentemente associada à beleza e harmonia na natureza.

Figura 27: Entendimento do aluno.


Ao todo, foi possível entender que é uma soma de sequência de vários resultados. Sempre irá ser pego o resultado atual e somar com o anterior, para obter o próximo resultado

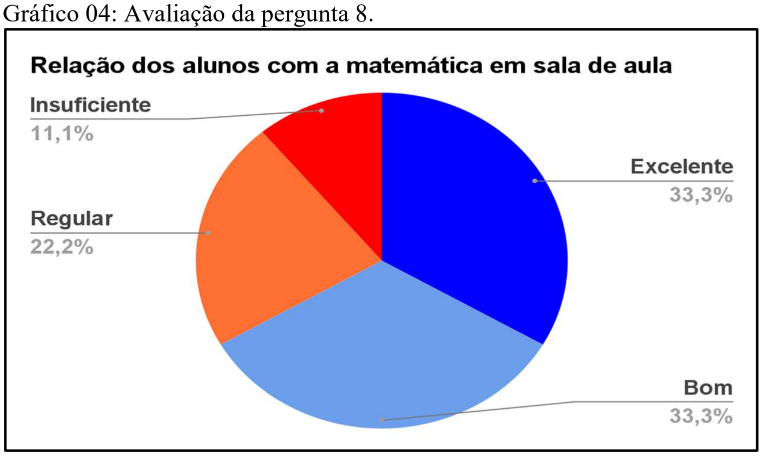
Fonte: O autor, 2023.

As definições apresentadas pelos alunos sobre a sequência de Fibonacci, seguiram o mesmo raciocínio, mostrado na Figura 27, logo, pode-se afirmar que foi um tema que teve 100% de aproveitamento, pois todos responderam de forma correta.

- **Pergunta 8 -** Sobre a relação dos estudantes com a Matemática em sala de aula.

Ao compartilhar um pouco da sua experiência e sua relação pessoal com a matemática em sala de aula, a rejeição apresentada pelos estudantes foi de 88,8%. A falta de compreensão foi o que mais desmotivou esses alunos, de acordo com os relatos nas respostas, causando falta de afinidade e desinteresse pela disciplina. No gráfico 04, mostra o interesse do assunto da Geometria Fractal apresentado.

Gráfico 04: Avaliação da pergunta 8.



Fonte: O autor, 2023.

De acordo com Carneiro (2018, p. 22),

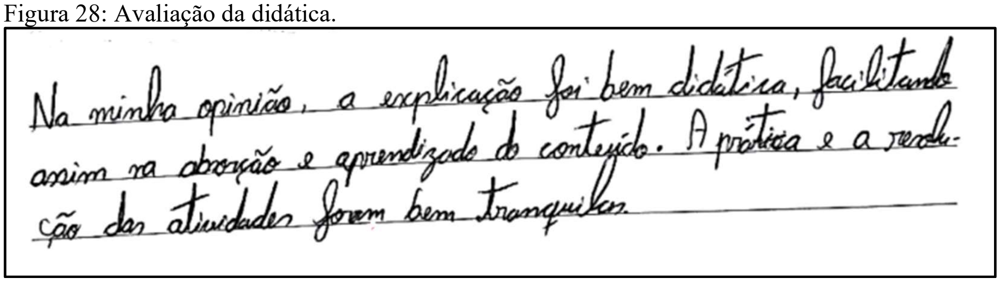
> [...] para os estudantes, a matemática é uma disciplina complexa demais, tornando-se algo difícil de compreender. Dessa forma surgem o desinteresse e a falta de comunicação entre professor e estudante, pois este muitas vezes fica com receio de se pronunciar diante da presença do professor e das suas dificuldades.

Mesmo que encontre dificuldades, a matemática é uma disciplina importante e valiosa que pode ajudar a desenvolver habilidades de raciocínio lógico e resolução de problemas. Se houvesse mais suporte para os alunos que têm dificuldades de compreensão e mais oportunidades de aplicação prática em sala de aula, tornaria a matemática mais atraente e motivadora para os alunos.

- **Pergunta 9 -** *O que chamou a sua atenção em relação às atividades desta oficina sobre a Geometria Fractal?*

Analisando as respostas da questão acima, foi constatado que os estudantes tiveram bastante interesse no conteúdo. Sendo assim, foi ressaltado sobre a importância da forma dinâmica como a oficina foi ministrada, como pode ser observada na resposta de um aluno, apresentada na Figura 28.

Figura 28: Avaliação da didática.


Na minha opinião, a explicação foi bem didática, facilitando assim na abrorção e aprendizado do conteúdo. A prática e a realização das atividades forem bem tranquilas.

Fonte: O autor, 2023.

O ponto mais positivo abordado pelos alunos, foram as atividades práticas, pois puderam compreender melhor os assuntos ministrados. A partir dessa análise e opiniões sobre o assunto, segundo os autores Bender e Costa (2018, p. 9) “Buscando oportunizar ao educador trabalhar de forma interdisciplinar e reunir todos os métodos dentro de apenas um, que pode aumentar a aprendizagem dos estudantes, formando cidadãos de opiniões, a situação de estudo une as diversas áreas e contempla a realização de um saber significativo.”.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho abordou o tema Geometria Fractal com alunos do 3° ano do ensino médio do curso técnico em Estradas do IFAP, campus Macapá. O objetivo foi mostrar uma breve introdução sobre o que são fractais e sua importância na ciência e em outras áreas do conhecimento, foram apresentados exemplos de figuras fractais para que os alunos pudessem visualizar e analisar suas características.

Na parte teórica e matemática do tema foi mostrado que a dimensão dos fractais é uma característica própria de cada objeto. Esta tem relação com seu grau de irregularidade, sendo fracionária ao invés de inteira, como acontece com os objetos na geometria euclidiana. Ao iniciar os estudos dos fractais e suas propriedades, talvez imagine-se que estes são apenas formas que se repetem inúmeras vezes, mas que não passam de objetos abstratos, desconectados da realidade e de que nada serviriam para o estudo e entendimento de outras ciências, o que é um equívoco, conforme foi mostrado nesta pesquisa por meio da apresentação de elementos concretos da natureza que são formas fractais.

Ficou evidente que a Geometria Fractal é um campo da matemática que estuda formas geométricas complexas e repetitivas, que se parecem com padrões encontrados na natureza, como em folhas de árvores, galáxias e formações geológicas. Para os alunos do ensino médio, a aplicação de Geometria Fractal tem o potencial de ajudá-los a compreender conceitos matemáticos abstratos, de uma forma mais visual e concreta, sendo este aspecto importante para o exercício e desenvolvimento de abstrações em outras áreas.

Após analisadas algumas aplicações foi percebido a importância de estudar e conhecer as propriedades de tais formas e fenômenos naturais. Além de suas aplicações nas ciências os fractais podem ser aplicados em sala de aula, tornando mais interessante estudar alguns conteúdos de geometria, como perímetros e áreas de figuras, promovendo também a interdisciplinaridade, pois as formas fractais são facilmente encontradas na natureza.

Como continuação deste trabalho, é possível por meio do estudo da geometria do fractal de Mandelbrot, observar a complexidade e beleza das estruturas e explorar conceitos matemáticos como iterações, sequências e equações no conjunto dos números complexos. Além disso, a Geometria Fractal também pode ser aplicada em áreas que vão além da matemática, como por exemplo, a visão computacional, a física, a biologia e a engenharia, tornando-a uma ferramenta interdisciplinar e útil para os alunos explorarem diferentes áreas do conhecimento, ficando assim como sugestão para trabalhos futuros.

REFERÊNCIAS

AMORAS, Alex Modesto. **Estudo da Sequência de Fibonacci via a Teoria de Álgebra Linear**. 2014. 63f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal do Amapá, Macapá, AP, 2014.

BOYER, Carl Benjamin; MERZBACH, Uta Caecilia. **História da matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012. 504 p. Tradução da 3.ª edição americana.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 29 set. 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais - Matemática**. Brasília, 1997.

BANDER, Danuza; COSTA, Gizele Maria Tonin da. Ensino Aprendizagem de Ciências: Metodologias que Contribuam no Processo. **Revista de Educação do IDEAU**. v.13, n.27, p. 1-12, 2018.

CARNEIRO, Letícia de Nazaré Souza. **Aprendizagem da matemática**: dificuldades para aprender conteúdos matemáticos por estudantes do Ensino Médio. 2018. 42 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal do Pará, Castanhal, PA, 2018.

CARVALHO, Gracielle Simões de. **Geometria Não Euclidiana**: Uma Proposta de Inserção da Geometria Esférica no Ensino Básico. 2017. 49f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Viçosa, Florestal, MG, 2017.

GIL, Antônio C. **Métodos e Técnicas de Pesquisa Social**. 6ª Edição. São Paulo: Atlas, 2008. 200p.

GODOY, Arilda S. Pesquisa Qualitativa: Tipos Fundamentais. **Revista de Administração de Empresas**. v.35, n.3, p.20-29. São Paulo, 1995.

MENDONÇA, Fernando Antônio Cavalcante. **Aplicações da Geometria Fractal**: uma proposta didática para o Ensino médio. 2016. 158f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Alagoas, Maceió, AL, 2016.

MARCONI, Mariana de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. **Fundamentos de Metodologia Científica**. 5ª Edição. São Paulo: Atlas, 2003. 331p.

NUNES, Raquel Sofia Rabelo. **Geometria Fractal e Aplicações**. 2006. 78f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) – Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Porto, 2006.

PAULA, Cleyton Eugenio Santos de; SOUZA, Tatiana Miguel Rodrigues de. Uma Abordagem da Geometria Fractal Para o Ensino Médio, Edição: Ermac. **Revista Eletrônica Paulista de Matemática**. v. 10, n.1, p. 136-148, 2017.

PIASESKI, Claudete M. **A Geometria no Ensino Fundamental**. 2010. 35 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Regional, Integrada do Alto Uruguai e das Missões Campus de Erechim, Erechim, RS, 2010.

PINHO, José Luiz Rosas; BATISTA, Eliezer; CARVALHO, Neri Terezinha Both. **Geometria I**. 2ª Edição. Florianópolis, 2010. 330p.

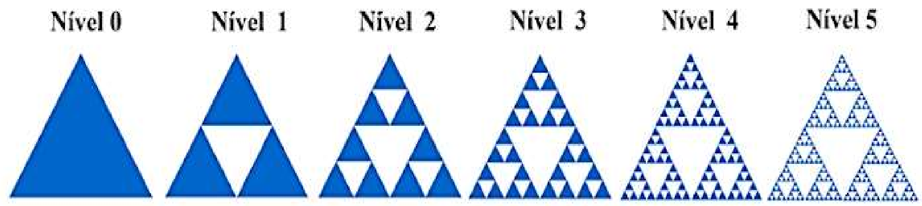
RABAY, Yara, Silvia Freire. **Estudo e Aplicações da Geometria Fractal**. 2013. 89f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, PB, 2013.

SILVA, Kauê Matsumoto. **Fractais e Algumas Aplicações ao Ensino**. 2015. 81f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de São Paulo, São Paulo, SP, 2015.

APÊNDICE A – ATIVIDADE 1

Exercício proposto aos alunos participantes

1 - Faça uma análise a partir da imagem do fractal abaixo:



- A dimensão do triângulo de Sierpinski:

- A dimensão da curva de Koch:

APÊNDICE B - QUESTIONÁRIO

OFICINA: A Geometria Fractal

Ministrante: Ismael Otony Maués

Queremos conhecer mais sobre você e seus conhecimentos sobre a Geometria Fractal, e o que aprendeu nestes encontros.

1. Você já conhecia a Geometria Fractal antes das oficinas?

( ) Sim

( ) Não

2. Conte-nos um pouco sobre o que você sabia a respeito da Geometria Fractal. Consegue lembrar de alguma situação prática em que seria possível aplicá-lo para resolver um problema?

____

____

____

3. Você consegue definir o que é um Fractal? Explique com suas palavras.

____

____

____

4. Você consegue associar um fractal na natureza? Se SIM, qual?

____

____

____

5. Você já conhecia alguma aplicação da Geometria Fractal? Se SIM, conte-nos um pouco sobre ela e como a conheceu.

6. Você já tinha conhecimento de que a Geometria Fractal é verdadeira e se aplica para outras áreas e que não apenas na matemática?

( ) Sim

( ) Não

7. O que você entendeu a respeito da abordagem da Sequência de Fibonacci na Geometria Fractal?

8. Compartilhe conosco um pouco da sua experiência e sua relação pessoal com a matemática em sala de aula. Conte-nos se gosta ou se não gosta, o porquê, e o que acha que poderia ser melhorado nas aulas.

9. O que chamou a sua atenção em relação às atividades desta oficina sobre a Geometria Fractal? Sugestões e críticas são bem-vindas.