INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO AMAPÁ
CAMPUS MACAPÁ
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

LEDEGELSON MOURA DE SOUZA

O USO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS NA MODELAGEM MATEMÁTICA DE FENÔMENOS FÍSICOS

MACAPÁ
2022

LEDEGELSON MOURA DE SOUZA

O USO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS NA MODELAGEM MATEMÁTICA DE FENÔMENOS FÍSICOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amapá, em cumprimento às exigências legais como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Carlos Alexandre Santana Oliveira.

MACAPÁ
2022

Biblioteca Institucional - IFAP
Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

S729u Souza, Ledegelson Moura de
O uso de equações diferenciais ordinárias na modelagem matemática de fenômenos físicos / Ledegelson Moura de Souza - Macapá, 2022.
33 f.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) -- Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amapá, Campus Macapá, Curso de Licenciatura em Matemática, 2022.

Orientador: Dr. Carlos Alexandre Santana Oliveira.

1. Matemática. 2. Equações diferenciais. 3. Aplicações à física. I. Oliveira, Dr. Carlos Alexandre Santana, orient. II. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica do IFAP
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

LEDEGELSON MOURA DE SOUZA

O USO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS NA MODELAGEM MATEMÁTICA DE FENÔMENOS FÍSICOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amapá, em cumprimento às exigências legais como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Carlos Alexandre Santana Oliveira
Orientador
IFAP

Prof. Dr. Fernando Bruno Martins Nunes
UEAP

Profa. Ma. Ageane Lígia Aranha Braga
IFAP

Apresentado em: 08/06/2022
Nota: 92

AGRADECIMENTOS

Ao criador, por sua infinita misericórdia de ter me dado a vida.

À minha mãe que sempre me apoiou nos estudos e, sobretudo, pelo fato de ela estar ao meu lado em todos os momentos.

Ao meu pai por todo ensinamento que me proporcionou e que sem os quais eu não teria me tornado o que sou.

À professora Cristina Coutinho por toda atenção, dedicação e orientação. Sou eternamente grato.

À minha esposa que foi ferramenta importante para que esse TCC tenha sido efetivado.

Aos meus professores do Instituto Federal do Amapá pelos ensinamentos. Em especial ao meu orientador, Professor Carlos Alexandre Santana Oliveira, que, sem sombra de dúvidas, não mediu esforços para que esse trabalho fosse concluído com sucesso. Deus o abençoe sempre.

Aos meus colegas de curso por todo apoio e companheirismo.

A todos os meus amigos que contribuíram de alguma forma com esse trabalho.

RESUMO

Neste trabalho abordamos, com base em pesquisa bibliográfica realizada nos principais livros de cálculo diferencial utilizados na graduação e periódicos relacionados ao tema, o uso de equações diferenciais ordinárias de primeira e segunda ordens na modelagem matemática de fenômenos físicos. Apresentamos o referencial teórico que norteia o estudo de equações diferencias, com intuito de construir uma base sólida para o entendimento das aplicações. Mostramos que este estudo se baseia em atacar um problema real, a fim de exibir modelos matemáticos que consigam explicar e mostrar a relação entre as variáveis envolvidas no processo de modelagem. Exibimos diferentes aplicações com a finalidade de evidenciar o quanto as equações diferenciais ordinárias são importantes nos estudos físicos. Destacamos o conhecimento matemático e sua relevância para o progresso da ciência, principalmente da física, da química e da biologia. Assim, a modelagem matemática construída através das equações diferenciais descortina o abstrato e, em consequência disso, auxilia no aprendizado significativo dos alunos de graduação.

Palavras-chave: matemática; equações diferenciais; aplicações à física.

ABSTRACT

In this work, based on bibliographic research carried out in the main differential calculus books used in undergraduate courses and in journals related to the topic, we approach the use of first and second order ordinary differential equations in the mathematical modeling of physical phenomena. We present the theoretical framework that guides the study of differential equations, in order to build a solid foundation for understanding the applications. We show that this study is based on attacking a real problem, in order to display mathematical models that can explain and show the relationship between the variables involved in the modeling process. We show different applications in order to show how important ordinary differential equations are in physical studies. We highlight mathematical knowledge and its relevance to the progress of science, especially physics, chemistry and biology. Thus, the mathematical modeling constructed through differential equations reveals the abstract and, as a result, helps in the significant learning of undergraduate students.

Keywords: golden stuff; visual impairment; meaningful teaching and learning.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Entre as muitas dificuldades no processo de ensino e aprendizagem, pesquisas têm mencionado que a abstração da disciplina de cálculo diferencial se mostra um grande desafio, e maior ainda é a sua aplicação e sua importância para outras áreas do conhecimento (FERNANDES; SALDANHA, 2014). Quanto a essa importância, a modelagem matemática tem um papel norteador em relação ao progresso da ciência, pois sua aplicação está presente em diversas áreas do conhecimento como a física, a química, a biologia entre outras. Nessa linha, as equações diferenciais têm sido uma ótima ferramenta na resolução de problemas matemáticos envolvendo as áreas supracitadas e, por conseguinte, ganhou muito destaque no campo da física.

Para Bassanezi (2002), a modelagem matemática é o processo de atacar um fenômeno real por teorias matemáticas resultando em um modelo que o descreve. A modelagem envolvida neste processo é caracterizada pela multidisciplinaridade, tornando tênue a distância entre a matemática e outras ciências. A literatura aponta que os estudos das equações diferenciais começaram com Pierre de Fermat, nas suas observações de cálculo (1601- 1665). Perpassaram por Isaac Newton (1642-1727) e Leibiniz (1646-1716), a partir do momento que esses exímios matemáticos tiveram base suficiente para a compreensão de derivadas. Mais adiante, estudiosos com Jakob Bernoulli descreveu equações diferencias para movimentos planetários.

Nos dias atuais, o dilema observado por Descartes está presente na rotina de muitos acadêmicos, pelo fato desses estudantes não conseguirem visualizar, principalmente nos cursos de exata, uma ligação entre os conhecimentos adquiridos e suas aplicações com o mundo real.

Vale destacar que o ensino de Matemática é importante também pelos elementos enriquecedores do pensamento matemático na formação intelectual do aluno, seja pela exatidão do pensamento lógico-demonstrativo que ela exibe, seja pelo exercício criativo da intuição, da imaginação e dos raciocínios indutivos e dedutivos (CUNHA, 2017, p.27). Dessa forma, pode-se dizer que é de suma importância trazer para a rotina dos discentes situações que envolvam aplicações de matemática nas áreas diversas do conhecimento, haja vista que esse fato fortalece o processo de ensino-aprendizagem do educando, dando-lhe possibilidade de “ver” a matemática não só como um campo do conhecimento que envolve teorias, mas o fato de sua importância ir além dos limites da sala de aula, no qual muitas vezes deixa transparecer que a disciplina é apenas conteudista.

Assim, o presente estudo, cujo tema é equações diferenciais ordinárias na modelagem matemática de fenômenos físicos, visa destacar a importância da matemática na construção do desenvolvimento de outras ciências da natureza, utilizando como ferramenta chave as principais aplicações de equações diferenciais ordinárias, especificamente as de primeira e segunda ordens na modelagem de fenômenos físicos, despertando o interesse dos acadêmicos para a importância da matemática no desenvolvimento científico.

1.1 O problema

Muitos estudantes não conseguem vislumbrar o fato de que a matemática está presente na modelagem de diversos problemas, desde os mais simples até os mais complexos. Este último ponto tem fundamento no fato da precariedade das demonstrações de algumas aplicações de matemática em outras áreas. Boyce e Diprima (2011) afirmam que:

> para certos estudantes o interesse intrínseco do assunto é motivação suficiente, mas para a maioria, as possíveis aplicações em outras áreas é que faz com que tal estudo tenha o seu valor. Dizem que muito dos princípios, ou leis, que regem o comportamento do mundo físico são proposições, ou relações envolvendo a taxa segundo a qual as coisas acontecem. Expressas em linguagem matemática, as relações são equações e as taxas são derivadas. Equações contendo derivadas são equações diferenciais. Portanto, para compreender e investigar problemas envolvendo o movimento de fluidos, o flux de corrente elétrica em circuitos, a dissipação de calor em objetos sólidos, a propagação e a detenção de ondas sísmicas ou o aumento ou a diminuição de populações, entre muitos outros, é necessário saber alguma coisa sobre equações diferenciais.

Além disso, Boyce e Diprima (2011) também dizem que:

> A importância das equações diferenciais está no fato de que mesmo as equações mais simples correspondem a modelos físicos úteis, como por exemplo, o decaimento de substâncias radioativas, o comportamento de sistemas de massas e molas e o comportamento de circuitos elétricos.

Corroborando com que foi mencionado:

> O desenvolvimento da área de modelagem de sistemas com uso de equações diferenciais ordinárias é importantíssimo para compreensão de fenômenos físicos (molas, Lei de Resfriamento de Newton, circuitos e entre outros), biológicos e químicos. E ainda se mostra um campo produtivo para pesquisa (MACHADO, 2016, p. 11).

Partindo desse pressuposto, este trabalho se direciona para as aplicações de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's) em problemas físicos, ou seja, uma aplicação efetiva da matemática. Pretende-se com isso, preencher as lacunas de muitos estudantes sobre EDO's, no sentido de construir o aprendizado desses alunos através de situações práticas.

Segundo Miguel (2004), a finalidade do ensino de matemática é fazer o estudante compreender e se apropriar da própria matemática "concebida como um conjunto de resultados, métodos, procedimentos, algoritmos e etc". Vale ressaltar que trazer para sala de aula as aplicações da matemática em outras áreas do conhecimento é uma enorme força motriz e representa um importante recurso pedagógico no processo de ensino e aprendizagem.

Vale destacar que somente aulas teóricas tendem a privar o aluno de conteúdos práticos, ou seja, transforma o educando em uma concha vazia, sem significado (BIEMBENGUT; NELSON, 2000). Dessa forma, sempre que pudermos associar a teoria com a prática teremos mais conteúdo para induzir o aluno a um melhor aprendizado.

A matemática está em tudo e tudo depende desta. Bassanezi (2002), afirma que as ciências naturais, como a física, têm o desenvolvimento de muitos conceitos respaldados pelo formalismo matemático. Além disso, Bassanezi (2002) nos diz que a modelagem matemática é o processo de atacar um fenômeno real por teorias matemáticas resultando em um modelo que o descreve. Por conseguinte, a modelagem se caracteriza através da ligação entre a matemática e demais ciências como no caso da física, da química, etc.

1.2 Organização do trabalho

O trabalho se organiza da seguinte maneira:

(i) No segundo capítulo temos a revisão bibliográfica dos principais tópicos relacionados ao tema, incluindo a origem e definições de equações diferencias ordinárias, de equações diferencias ordinárias de 1ª ordem, de equações diferenciais de primeira ordem de variáveis separáveis, de equações lineares de 1ª ordem e de equações diferenciais ordinárias de 2ª ordem.

(ii) No capítulo 3 temos algumas aplicações das equações diferencias ordinárias, incluindo o crescimento populacional, a lei de aquecimento e resfriamento de Newton, os juros compostos continuamente, o decaimento radioativo e a quantidade e concentração de massa em função do tempo.

(iii) O capítulo 4 mostra algumas das principais aplicações de equações diferenciais ordinárias na modelagem de fenômenos físicos, contendo exemplos sobre posições e velocidades por integração, sistema massa-mola, movimento vertical, circuitos elétricos, fluxo de corrente elétrica e pêndulo simples.

(iv) O capítulo 5 apresenta as considerações finais do trabalho, visando agregar mais valor a ele.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo será feita uma revisão bibliográfica dos principais tópicos necessários para o embasamento do trabalho.

2.1 Origem das equações diferenciais

Os fundamentos desse tema parecem estar dominados pela contribuição de Leonard Euler. Pode-se dizer que a história das equações diferenciais começa e termina com ele, no entanto isso seria uma simplificação grosseria de seu desenvolvimento, pois diversos contribuintes importantes que precederam Leonardo Euler foram de suma importância para que ele pudesse compreender o cálculo e a análise necessária para desenvolver muitas das ideias essenciais de equações diferenciais.

Os contribuintes que precederam Leonardo Euler refinaram seu trabalho e a partir disso produziram ideias novas, não acessíveis ao século XVIII de Euler e sofisticadas e além do entendimento de uma pessoa. A história das equações diferenciais começa com os precursores do cálculo: Leibniz e Newton. Quando estes matemáticos brilhantes tiveram uma linguagem apropriada e conhecimento suficiente sobre derivadas, logo estas apareceram em equações e esse campo de estudo ganhou notoriedade. Contudo, logo descobriram que as soluções para essas equações não eram tão fáceis. As manipulações e simplificações algébricas ajudaram apenas um pouco. A integral e seu papel teórico no teorema fundamental do cálculo ofereceu ajuda apenas quando as variáveis eram separáveis. O método de separação de variáveis foi generalizado por Leibniz, apesar de ter sido desenvolvido por Jacob Bernoulli (BOYCE; DIPRIMA, 2011). A partir disso, estes pesquisadores iniciais do século XVII focalizaram nos casos especiais e “reservaram” o desenvolvimento mais geral das teorias e técnicas para aqueles que o seguiam. Apesar de Isaac Newton ter atuado, digamos, pouco na área de equações de diferenciais de fato, seu desenvolvimento do cálculo e a exposição dos princípios básicos da mecânica, forneceram a base para aplicação de equações diferenciais no século XVIII, principalmente por Leonardo Euler. Em consequência disso, este século é marcado por intensas teorias acerca das equações diferenciais (SIMÕES, 2014), culminando em importantes estudos sobre ela.

Leibniz nasceu em Leipzig e completou seu doutorado em filosofia na Universidade Oxford, quando tinha 20 anos. Em seus estudos sobre equações diferencias, descobriu o método de separações de variáveis no ano de 1691. A redução de equações homogêneas a equações separáveis em 1691 e o procedimento para resolver equações lineares em 1694. Os irmãos Bernoulli deram uma grande contribuição sobre desenvolvimento de métodos para a resolução de equações diferenciais e também para ampliar o campo de suas aplicações. Ambos estavam frequentemente envolvidos em disputas, especialmente entre si, o que ocasionava intrigas. Apesar disso, eles deram suas contribuições significativas nessa área. Com o uso de equações diferencias, resolveram diversos problemas em mecânica, formulando-os como equações diferenciais (BOYCE; DIPRIMA, 2011).

Em ciências, engenharia, economia e até mesmo em áreas que, à primeira vista, parecem não ter relação com a matemática, como é o caso de psicologia, frequentemente deseja-se modelar ou descrever o comportamento de alguns fenômenos ou sistemas em termos matemáticos (DOMENICO, 2021). Essa descrição começa com algo do tipo:

(i) Identificar as variáveis responsáveis por mudanças no sistema;

(ii) Um conjunto de hipótese razoáveis sobre o sistema.

As hipóteses também incluem algumas leis empíricas que são aplicáveis ao sistema. A estrutura matemática de todas essas hipóteses, ou o modelo matemático do sistema é, muitas vezes, uma equação diferencial ou um sistema de equações diferenciais. Dessa forma, esperamos que um modelo matemático do sistema tenha uma solução que seja

2.2 O que é uma equação diferencial ordinária?

Suponhamos que estivéssemos querendo determinar com que velocidade um jovem aprendiz consegue desempenhar um certo trabalho dado a ele. Tomando como base uma certa teoria que diz: quanto mais conhecimento tem um funcionário sobre a tarefa, mas lento é sua aprendizagem. A partir disso, tomando $x\%$ como o percentual da tarefa a ser dominada e dx/dt a taxa na qual o aprendiz, nesse caso, aprende, logo dx/dt diminui enquanto x aumenta. O que se pode dizer de x como uma função de t?

Para descrever, de forma mais sucinta, como uma pessoa aprende, deve-se ter informações mais detalhadas em como dx/dt depende de x. Tomamos como base que a taxa em que a pessoa aprende seja igual ao percentual ainda não aprendido da tarefa, no qual o tempo é medido em mês. Como x é o percentual aprendido até o tempo t (dado em mês), o percentual aprendido até aquele momento será $100 - x$. Em decorrência disso, temos:

$$\frac{dx}{dt} = 100 - x. \tag{2.1}$$

Essa equação, que dá informação sobre a taxa de variação de uma função desconhecida, chama-se **equação diferencial ordinária**.

2.3 Equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem

Segundo Guidorizzi (2008), uma equação diferencial de 1ª ordem é da forma:

$$\frac{dy}{dx} = F(x,y) \tag{2.2}$$

ou

$$y' = F(x,y). \tag{2.3}$$

Onde $F(x,y)$ é uma função definida em $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 2.1. *Verifique se* $y = e^{x^2}, x \in \mathbb{R}$ *é uma solução da equação diferencial* $\frac{dy}{dx} = 2xy$.

Solução: Precisamos verificar se $y = e^{x^2}$ é uma solução da equação diferencial $\frac{dy}{dx} = 2xy$, ou seja,

$$\frac{dy}{dx} = \left(e^{x^2}\right)' = 2xe^{x^2} = 2xy. \tag{2.4}$$

Assim, $y = e^{x^2}$ é uma solução da equação dada.

Exemplo 2.2. *Determine uma solução* $y = y(x)$ *da equação* $\frac{dy}{dx} = 3x+5$ *que satisfaça a condição inicial* $y(0) = 2$.

Solução: O que queremos aqui é uma função $y = y(x)$, com $y(0) = 2$, cuja derivada seja $3x+5$. Então,

$$\int (3x+5)\,dx = \frac{3x^2}{2} + 5x + k, \tag{2.5}$$

com k constante, é a solução geral da equação. Além disso, $\frac{3x^2}{2} + 5x + 2$ é uma solução particular que satisfaz a equação dada.

2.3.1 Equações diferenciais de primeira ordem de variáveis separáveis

Segundo Guidorizzi (2008), uma equação diferencial de primeira ordem de variáveis separáveis é escrita na forma:

$$\frac{dx}{dt} = g(t)h(x), \tag{2.6}$$

onde g e h sã funções definidas em intervalos abertos I_1 e I_2, respectivamente. Uma solução de 2.6 é uma função $x = x(t)$ definida num intervalo aberto I, $I \subset I_1$, tal que, para todo t em I,

$$x'(t) = g(t)h(x(t)). \tag{2.7}$$

Exemplo 2.3. $\frac{dx}{dt} = tx$ *é uma equação diferencial de 1ª ordem de variáveis separáveis, pois* $g(t) = t$ *e* $h(x) = x$.

Exemplo 2.4. $\frac{dx}{dt} = t^2 + x^2$ *é uma equação diferencial de 1ª ordem, mas não de variáveis separáveis.*

Exemplo 2.5. *Vamos verificar se* $x(t) = -\frac{2}{t^2-1}$, *com* $-1 < t < 1$, *é a solução da equação* $\frac{dx}{dt} = tx^2$.

Solução: É preciso mostrar que, $\forall t \in (-1,1)$, $x'(t) = t(x(t))^2$. Veja que

$$x'(t) = t\left[-\frac{2}{t^2-1}\right]^2 = \frac{4t}{(t^2-1)^2}. \tag{2.8}$$

Assim, para todo $t \in (-1,1)$, $x'(t) = t(x(t))^2$, ou seja, $x(t) = -\frac{2}{t^2-1}$, com $-1 < t < 1$, é a solução da equação dada.

2.4 Equações lineares de primeira ordem

Uma equação diferencial linear de primeira ordem é uma equação do tipo (GUIDORIZZI, 2008):

$$\frac{dy}{dx} = f(x)y + g(x), \tag{2.9}$$

onde $f(x)$ e $g(x)$ são funções contínuas definidas em um mesmo intervalo I. Se $g(x) = 0$ em I, então diremos que a equação 2.9 é uma equação linear homogênea de 1ª ordem.

Exemplo 2.6. $\frac{dy}{dx} = xy + 1$ *é linear de 1ª ordem, com* $f(x) = x$ *e* $g(x) = 1$. *Esta equação é linear, mas não-homogênea.*

Exemplo 2.7. $\frac{dy}{dx} = t^2 x$ *é linear de 1ª ordem e de variáveis separáveis.Aqui* $f(t) = t^2$ *e* $g(t) = 0$. *Trata-se, ainda, de uma equação linear homogênea de 1ª ordem, pois* $g(t) = 0$ *para todo* t.

2.4.1 Resolvendo uma equação linear de primeira ordem

Uma equação linear de primeira ordem é do tipo (THOMAS et al., 2002):

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x), \tag{2.10}$$

que poderá ser resolvida multiplicando ambos os membros por uma função positiva $u(x)$ que transforma o lado esquerdo na derivada do produto $u(x)y$. Por conseguinte, uma vez determinada a função $u(x)$, ela fornece a solução desejada. Assim,

$$\frac{dy}{dx}u(x) + u(x)P(x)y = u(x)Q(x) \tag{2.11}$$

e

$$\frac{d(u(x)y)}{dx} = u(x)Q(x). \tag{2.12}$$

Observe que $u(x)$ é escolhida de maneira que

$$u(x)\frac{dy}{dx} + P(x)y = \frac{d(uy)}{dx}. \tag{2.13}$$

Dessa forma, integrando em relação a x a equação 2.12, obtemos

$$u(x)y = \int u(x)Q(x)dx \tag{2.14}$$

e

$$y = \frac{1}{u(x)}\int u(x)Q(x)dx \tag{2.15}$$

que representa a expressão para o valor de y. Assim, a equação 2.14 expressa a solução para a equação 2.10 em termos das funções $u(x)$ e $Q(x)$.

Teorema 2.1. *A solução da equação linear*

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{2.16}$$

é

$$y = \frac{1}{u(x)} \int u(x)Q(x)dx, \tag{2.17}$$

com $u(x) = e^{\int P(x)dx}$.

Exemplo 2.8. *Vamos resolver a equação* $x\frac{dy}{dx} - x^2 = 3y$*, com* $x > 0$.

Solução: Escrevendo a equação dada na forma padrão, temos:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{3y}{x} = x, \tag{2.18}$$

com $P(x) = -3/x$ e $Q(x) = x$. Usando o teorema 2.1, temos:

$$u(x) = e^{\int -\frac{3}{x}dx} = e^{-3\ln x} \rightarrow u(x) = \frac{1}{x^3}. \tag{2.19}$$

Logo,

$$y = x^3 \int \frac{1}{x^3} x dx = x^3 \int \frac{1}{x^2} dx \rightarrow y = x^3 \left(-\frac{1}{x} + C \right), \tag{2.20}$$

com C constante.Dessa maneira,

$$y = -x^2 + x^3 C. \tag{2.21}$$

que é a solução para o exemplo dado.

2.5 Equações diferenciais ordinárias de 2ª ordem

Uma equação diferencial de 2ª ordem é uma equação da forma (GUIDORIZZI, 2008):

$$\frac{d^2x}{dt^2} = F(t, x, \frac{dx}{dt}) \tag{2.22}$$

ou

$$\frac{d^2y}{dx^2} = F(x, y, \frac{dy}{dx}). \tag{2.23}$$

Exemplo 2.9. *A Lei de Newton afirma que* $F = ma$. *Se* $x(t)$ *representa a posição de uma partícula no instante* t*, então podemos escrever:*

$$\frac{md^2x}{dt^2} = F, \tag{2.24}$$

em que a força resultante pode depender do tempo t*, da posição* x *e da velocidade da partícula* $\frac{dx}{dt}$.

No exemplo 2.9 temos uma equação que envolve a segunda derivada de uma função x em t. Dessa forma, ela é chamada equação diferencial de segunda ordem. Note que o exemplo dado ($F = ma$) é um problema físico que foi modelado usando exatamente a equação 2.24.

2.5.1 Equações diferencias lineares homogêneas, de 2ª ordem, com coeficientes constantes

Uma equação diferencial de 2ª ordem, com coeficientes constantes, é uma equação da forma (GUIDORIZZI, 2008):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = f(t), \tag{2.25}$$

onde b e c são números reais dados e f é uma função contínua. Se $f(t) = 0$ a equação 2.25 se diz homogênea.

Nosso objetivo, a seguir, é determinar a solução da equação homogênea:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = 0. \tag{2.26}$$

Para isso, iremos precisar da equação algébrica:

$$\gamma^2 + b\gamma + c = 0 \tag{2.27}$$

denominada equação característica de 2.26. Caso γ_1 seja raiz real da equação 2.27 , então $x = e^{\gamma_1 t}$ será a solução da equação 2.26. De fato, para todo t temos:

$$\left(e^{\gamma_1 t}\right)'' + b\left(e^{\gamma_1 t}\right)' + ce^{\gamma_1 t} = \gamma_1^2 e^{\gamma_1 t} + \gamma_1 b e^{\gamma_1 t} + ce^{\gamma_1 t} = e^{\gamma_1 t}\left(\gamma_1^2 + \gamma_1 + c\right) = 0 \tag{2.28}$$

Teorema 2.2. *Suponhamos que γ_1 e γ_2 sejam as raízes reais da equação característica 2.27 . Então:*

(i) Se $\gamma_1 \neq \gamma_2$, a solução geral da equação homogênea 2.26 será:

$$x = Ae^{\gamma_1 t} + Be^{\gamma_2 t}, (A, B \in \mathbb{R}) \tag{2.29}$$

(ii) Se $\gamma_1 = \gamma_2$, a solução geral será:

$$x = Ae^{\gamma_1 t} + Bte^{\gamma_1 t}, (A, B \in \mathbb{R}) \tag{2.30}$$

Teorema 2.3. *Seja a equação (b e c reais dados):*

$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0 \tag{2.31}$$

e suponhamos que as raízes da equação característica 2.27, sejam complexas ($\lambda = \alpha + \beta i$, com $\alpha = -\frac{b}{2}$ e $\beta = \sqrt{|\Delta|}$). Então a solução geral de 2.31 será:

$$x = e^{\alpha t}\left[A\cos\beta t + B\sin\beta t\right], (A, B \in \mathbb{R}). \tag{2.32}$$

2.6 Conclusão

Os conceitos, definições, teoremas e exemplos aqui tratados foram apresentados de forma sucinta e tiveram o intuito de colaborar com a compreensão das aplicações de equações diferenciais que serão consideradas nos próximos capítulos deste trabalho.

3 APLICAÇÕES DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAS ORDINÁRIAS

Neste capítulo, será realizado um estudo, baseado em pesquisa bibliográfica, das principais aplicações de equações diferenciais ordinárias.

3.1 Crescimento populacional

O modelo mais simples de crescimento populacional é aquele em que se supõe que a taxa de crescimento de uma população dx/dt é proporcional à população presente naquele instante $x(t)$, ou seja, caso uma população aumente em um instante t, maior será a população no futuro (CADEMI, 2016). Podemos descrever o problema de encontrar $x(t)$ como o problema de valor inicial:

$$\frac{dx}{dt} = wx, x(t_0) = x_0, \tag{3.1}$$

onde w é uma constante de proporcionalidade.

A equação 3.1 serve como modelo para diversos fenômenos envolvendo crescimento ou decrescimento exponencial. Tomemos um exemplo:

Exemplo 3.1. *Em uma cultura, há inicialmente k_0 bactérias. Uma hora depois $(t = 1)$, o número de bactérias passa a ser $\frac{5}{3}k_0$. Se a taxa de crescimento é proporcional ao número de bactérias presentes, determine o tempo necessário para que o número de bactérias quadruplique.*

Solução: Primeiro resolvemos a equação diferencial $\frac{dk}{dt} = ck$, sujeita a $k(0) = k_0$. Então, usamos a condição empírica $k(1) = \frac{5}{3}k_0$ para determinar a constante de proporcionalidade c. Resolvendo a equação diferencial acima, temos:

$$\int \frac{dk}{dt} = \int cdt, \tag{3.2}$$

logo,

$$k(t) = we^{ct}, \tag{3.3}$$

em $t = 0$, concluímos que $k(0) = w$. Assim, teremos: $k(t) = k_0 e^{ct}$. Em $t = 1$, temos: $k(1) = \frac{5}{3}k_0 = k_0 e^c$. Dessa forma $e^c = \frac{5}{3}$ e $c = \ln(\frac{5}{3}))$, ou seja, $c = 0,51082562377$.

A expressão $k(t)$ é, portanto, $k(t) = k_0 e^{0,51082562377t}$. Para encontrar o tempo necessário para que o número de bactérias quadruplique, resolvemos:

$$4k_0 = k_0 e^{0,51082562377t}, \tag{3.4}$$

isolando t obtemos

$$t = \frac{\ln 4}{0,51082562377}x \rightarrow t \approx 2,7138h. \tag{3.5}$$

Em 1798, o economista inglês Thomas Malthus, no trabalho “An Essay on the Principle of Population” formulou um modelo para descrever a populacão presente em um ambiente em função do tempo. Ele considerou $P = P(t)$ o número de indivíduos de uma população, sendo $N(0)$ esta população no instante $t = 0$. Considerou a hipótese que os nascimentos e mortes naquele ambiente eram proporcionais a população presente e que a variação da população era conhecida entre dois períodos, num lapso de tempo Δt. Se ΔP é a variação da populacão, temos $\Delta P = aP(t)\Delta t - bP(t)\Delta t$, em que $aP(t)\Delta t$ é o numero de nascimentos e $bP(t)\Delta t$ é o número de mortes no período. Dessa forma $\frac{\Delta P}{\Delta T} = rP(t)$, no qual $r = a - b$. Tomando o limite quando $\Delta t \to 0$, obtemos $\frac{dN}{dt} = rN$ que é a equação diferencial ordinária para o modelo populacional do ponto de vista de Malthus. Para resolver esta EDO, devemos usar o método das variáveis separáveis (SODRÉ, 2007).

3.2 A lei de aquecimento e resfriamento de Newton

Suponhamos que um recipiente contenha água a uma temperatura 75ºC e seja colocado em um ambiente frio. A água do recipiente resfriará a uma taxa proporcional à diferença de temperatura entre a água e a do ambiente (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2014). Analogicamente, se os papeis se invertessem, ou seja, a água estivesse fria e o ambiente a uma temperatura superior, logo a água aqueceria a uma taxa que é também proporcional à diferença de temperatura entre ela e a do ambiente. Em suma, essa lei diz (Lei de Resfriamento de Newton) que a taxa de temperatura em relação ao tempo é proporcional à diferença entre a temperatura em qualquer instante t e a temperatura ambiente. Dado isso temos,

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_{amb}), \tag{3.6}$$

onde k é uma constante de proporcionalidade, T é a temperatura em qualquer instante t e T_{amb} é a temperatura ambiente.

Vejamos o seguinte exemplo envolvendo uma aplicação prática dessa modelagem.

Exemplo 3.2. *Um copo de água a uma temperatura de 82°C é colocado em uma sala com temperatura ambiente de 20°C. Tomando como base a Lei de Resfriamentos de Newton, pergunta-se:*

(i) Qual a temperatura da água após t minutos colocada na sala?

(ii) Quantos minutos levará para água atingir 50°C se ela esfria a 80°C em 1 minuto?

Solução (i): Usando a equação 3.6, podemos escrever:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 20). \tag{3.7}$$

Utilizando o método de separação de variáveis, obtemos:

$$\frac{dT}{T - 20} = -kdt. \tag{3.8}$$

Feito isso, basta aplicar a integral indefinida membro a membro e encontrar:

$$\int \frac{dT}{T-20} = -\int kdt \rightarrow \ln|t-20| = -kt + c. \tag{3.9}$$

Logo, a solução geral é dada da seguinte forma:

$$T(t) = Be^{-kt} + 20, B \in \mathbb{R}. \tag{3.10}$$

Note que para $t = 0$ a temperatura dada foi de 82°C. Daí, substituindo esses valores em 3.10, resulta:

$$B + 20 = 82 \rightarrow B = 62. \tag{3.11}$$

Assim, a solução particular será:

$$T(t) = 62e^{-kt} + 20. \tag{3.12}$$

Solução (ii): Substituindo o valor de $T(1) = 80$ na equação 3.12, encontramos:

$$80 = 62e^{-k} + 20 \rightarrow k \approx 0,03278982282. \tag{3.13}$$

Inserindo os valores de $T(t) = 50$ e $k = 0,03278982282$ na equação 3.12, encontramos:

$$50 = 62e^{-0,03278982282t} + 20 \rightarrow t \approx 22min. \tag{3.14}$$

3.3 Juros compostos continuamente

Quando a capitalização é feita de forma contínua, o valor aplicado M aumenta a uma taxa proporcional a quantidade presente em relação tempo. Isto é,

$$\frac{dM}{dt} = kM, \tag{3.15}$$

sendo k a taxa anual de juros. Feito isso, podemos expressar M em função do tempo t, resolvendo a equação diferencial 3.15. Assim, integrando membro a membro a equação 3.15, obtemos:

$$\int \frac{dM}{dt} = k\int dt \rightarrow M(t) = b.e^{kt}, b \in \mathbb{R} \tag{3.16}$$

Para um capital inicial M_0, em que $t = 0$, podemos determinar o valor de b da seguinte maneira:

$$M_0 = e^{k.0}b = b. \tag{3.17}$$

Reescrevendo a equação 3.16, temos,

$$M(t) = M_0.e^{k.t}. \tag{3.18}$$

A seguir, será apresentado um exemplo envolvendo uma aplicação prática de capitalização contínua.

Exemplo 3.3. *Ledegelson Souza aplica R$ 10.000,00 em uma conta. Suponhamos que ele não faça nenhuma movimentação financeira nessa aplicação durante um período de 12 anos. A partir dessas informações, calcule quando Ledegelson disporá, se o banco aplica juros de 4% ao ano compostos continuamente durante todo esse período de aplicação.*

Solução: São dados $M_0 = 10000$, $t = 12$ anos e $k = 4\%$ ao ano. Substituindo esses valores na equação 3.18 de juros compostos continuamente, obtemos o valor procurado.

$$M(12) = 10000e^{\frac{4}{100}\cdot 12} \rightarrow M(12) \approx 16160,74 \tag{3.19}$$

3.4 Decaimento radioativo

Quando o nitrogênio na parte superior da atmosfera da Terra é bombardeado pelos raios cósmicos, produz-se o elemento carbono-14 radioativo. O carbono-14 combina-se com o oxigênio para formar o dióxido de carbono, o qual é inserido pelas plantas, que por sua vez, são comidas pelos animais. Dessa maneira, todas as plantas e os animais vivos absorvem quantidades de carbono-14 radioativo.

Em 1947, o cientista americano W. F. Libby propôs a teoria de que parte do carbono -14 na atmosfera e em tecidos vivos de plantas é a mesma. Quando uma planta ou um animal morre, o carbono- 14 no tecido começa a decair. Dessa forma, a idade de um artefato que contém material de algum animal ou vegetal pode ser estimada, determinando a percentagem do seu conteúdo de carbono-14 original. A partir disso, vários procedimentos formam feitos para medir essa porcentagem.

Anton, Bivens e Davis (2014) dizem que os elementos radioativos, para a física, se desintegram espontaneamente em um processo chamado de decaimento radioativo. A grosso modo, o decaimento radioativo seria uma emissão de partículas alfa, beta ou gama, a partir de um núcleo instável. Os experimentos têm mostrado que a taxa de desintegração em relação ao tempo é proporcional a quantidade de elementos presentes (massa). A modelagem desse problema pode ser feita através do uso de equação diferencial ordinária, conforme descrito na equação 3.20.

$$\frac{dm}{dt} = km. \tag{3.20}$$

Resolvendo a equação diferencial 3.20 pelo método de separação de variáveis, ver-se que:

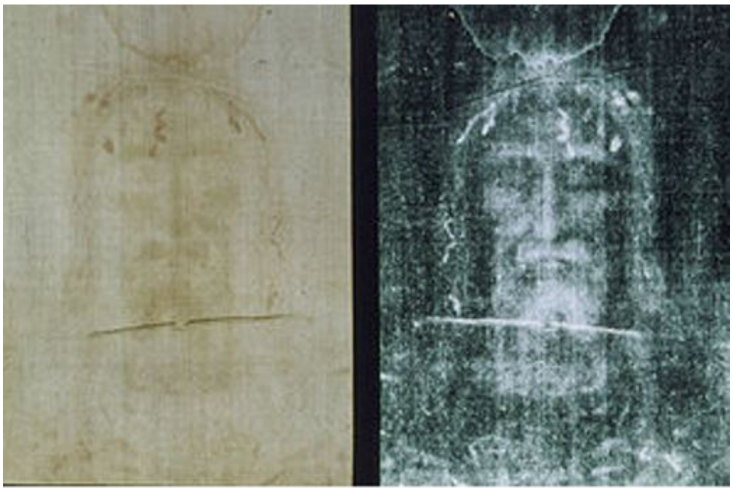
$$m = m_0 \cdot e^{kt}. \tag{3.21}$$

Note que a taxa de variação da massa em relação ao tempo é proporcional à variação da massa em qualquer instante.

Vejamos, a seguir, um exemplo prático.

Exemplo 3.4. *O sudário de Turim (Ver Figura 1) mostra a imagem, em negativo, do corpo de um homem que aparentemente foi crucificado, em que muitos acreditavam ser Jesus de Nazaré. Três* *laboratórios científicos e independentes analisaram o tecido e concluíram que o sudário tinha aproximadamente 660 anos, idade consistente com seu aparecimento histórico. Sabendo-se que a meia vida do C-14 é aproximadamente 5700 anos, calcule a porcentagem aproximada da quantidade original de C-14 remanescente no tecido.*

Figura 1 – Sudário de Turim



Fonte:Wikipédia (2022).

Solução: A meia vida de m será $m/2$. Organizando os devidos valores na equação 3.21 tem-se:

$$\frac{1}{2}m_0 = m_0 \cdot e^{5700k}. \tag{3.22}$$

Daí,

$$\frac{1}{2} = e^{5700k}. \tag{3.23}$$

Aplicando ln nos dois membros da equação 3.23, temos:

$$\ln\frac{1}{2} = \ln e^{5700k} \rightarrow k = \frac{\ln\frac{1}{2}}{5700}. \tag{3.24}$$

Agora basta substituir os valores de k e $t = 660$ na equação 3.21, que encontramos o valor procurado, ou seja,

$$m = m_0 \cdot e^{\frac{\ln(1/2)}{5700}\cdot 660} \rightarrow m = m_0 \cdot 0,9229. \tag{3.25}$$

Dessa forma, a resposta para o problema será aproximadamente 92,29%.

3.5 Quantidade e concentração de massa em função do tempo

Iremos tomar o exemplo a seguir para a concentração de sal em um reservatório em função do tempo. No problema foram feitas algumas adaptações para torná-lo um pouco mais analítico.

Exemplo 3.5. *Em um reservatório há 75 litros de água contendo 25 gramas de sal. A água (sem sal) entra no reservatório à razão de 10 litros por minutos e escoa à razão de 5 litros por minutos, conservando-se a concentração uniforme por agitação. A partir das informações acima, vamos determinar uma expressão para a quantidade e para a concentração de sal no tanque em um tempo t (**Problema I**). Determinar qual a concentração de sal no reservatório no final de 35 minutos (**Problema II**).*

Solução - Problema I: Nota-se que a taxa de variação da massa de sal (dado em gramas) em relação ao tempo, depende do que entra e o que sai de sal no reservatório em relação ao tempo. Organizando os dados do problema temos:

$M(t)$: massa de sal em função do tempo;

M_0: massa inicial de sal no reservatório (25g);

Entrada: $10l$ por minuto apenas de água;

Saída: $5l$ por minuto da solução água e sal.

$\frac{dm}{dt}$ = taxa inicial de entrada de sal – taxada de saída de sal. Note que a taxa inicial de entrada se sal é igual a zero.

O problema diz que a cada minuto teremos 75 litros que já estavam no tanque mais a diferença dada em função do tempo, entre a entrada e saída de água, ou seja, $75+5t = 5(15+t)$. Organizando a taxa de saída de sal do tanque teremos:

$$\left(\frac{5l}{min}\right)\cdot\left(\frac{m(t)}{75+5t}\right)l = \frac{5\cdot m(t)}{75+5t}, \tag{3.26}$$

onde

$$\frac{dm}{dt} = 0 - \frac{5\cdot m(t)}{75+5t} \to \frac{dm}{m(t)} = -\frac{5dt}{75+5t}. \tag{3.27}$$

Integrando membro a membro a equação 3.27, resulta

$$\int \frac{dm}{m} = -\int \frac{dt}{15+t} \to \ln|m| = -|15+5t|+c, \tag{3.28}$$

onde c é constante. Aplicando a exponencial de base e em ambos os lados da equação 3.28 e considerando que $m(0) = 25$ g, obtemos:

$$m(t) = \frac{1}{15+t}.k, k = e^c \to 25 = \frac{1}{15}\cdot k \to k = 375. \tag{3.29}$$

Dessa forma,

$$m(t) = \frac{375}{15+t}. \tag{3.30}$$

A concentração (C) será dada pela razão entre a massa de sal e o volume da solução. Logo teremos:

$$C = \frac{375}{(15+t)}\cdot\frac{1}{(75+5t)} = \frac{75}{(15+t)^2}. \tag{3.31}$$

Solução - Problema II: Substituindo os devidos valores na equação 3.31, encontramos:

$$C = \frac{75}{(15+35)^2} = \frac{75}{2500} = 0,3g/l. \tag{3.32}$$

3.6 Conclusão

Como podemos perceber, as aplicações das equações diferenciais aparecem nas várias áreas do conhecimento e, de certa forma, são de fácil entendimento. Para que o aluno da graduação consiga ter êxito nos estudos de equações diferenciais, basta que ele tenha uma boa base de cálculo diferencial, principalmente de derivada e integral.

4 O USO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS NA MODELAGEM MATEMÁTICA DE FENÔMENOS FÍSICOS

Os estudos das equações diferenciais vêm atraindo matemáticos desde quando começaram a ser estudadas por Newton (BOYCE; DIPRIMA, 2011). Além disso, como visto no capítulo anterior, essas equações são usadas para investigar uma variedades de problemas do mundo real, dentre eles, os problemas físicos. Assim, será apresentado neste capítulo as principais aplicações de EDO's no estudo de fenômenos físicos, objeto do presente trabalho.

4.1 Encontrando posições e velocidades por integração

Anton, Bivens e Davis (2014) descrevem que se uma partícula em movimento retilíneo tem uma função posição $s(t)$, então sua velocidade $v(t)$ e aceleração $a(t)$ instantâneas são dadas pelas equações:

$$v(t) = s'(t) \tag{4.1}$$

e

$$a(t) = v'(t), \tag{4.2}$$

ou seja, $s(t)$ é uma antiderivada de $v(t)$ e que $v(t)$ é uma antiderivada de $a(t)$. Assim,

$$s(t) = \int v(t)dt \tag{4.3}$$

e

$$v(t) = \int a(t)dt. \tag{4.4}$$

Feito isso,

> Pela Fórmula 4.3, se conhecermos a função velocidade $v(t)$ de uma partícula em movimento retilíneo, então a integração de $v(t)$ produz uma família de funções posição com aquela função velocidade. Se, além disso, soubermos a posição s_0 da partícula em algum instante t_0, então teremos informação suficiente para encontrar a constante de integração e determinar uma única função posição. Analogamente, se conhecermos a função aceleração $a(t)$ da partícula, então a integração de $a(t)$ produz uma família de funções velocidade com aquela função aceleração. Se, além disso, soubermos a velocidade v_0 da partícula em algum instante t_0, então teremos informação suficiente para encontrar a constante de integração e determinar uma única função velocidade (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2014, p. 76).

Exemplo 4.1. *Uma partícula move-se com velocidade $v(t) = \cos(\pi t)$ ao longo de um eixo coordenado. Sabendo que a partícula tem a coordenada $s = 4$ no instante $t = 0$, encontre sua função posição.*

Solução: A função posição é

$$s(t) = \int v(t)dt \to s(t) = \int \cos(\pi t)\,dt \to s(t) = \frac{1}{\pi}\sin(\pi t) + C. \tag{4.5}$$

Como $s = 4$ quando $t = 0$, tem-se que:

$$s(t) = \frac{1}{\pi}\sin(\pi t) + C \rightarrow 4 = \frac{1}{\pi}\sin(0) + C \rightarrow C = 4. \tag{4.6}$$

Portanto,

$$s(t) = \frac{1}{\pi}\sin(\pi t) + 4. \tag{4.7}$$

4.2 O sistema massa-mola

Hughes-Hallett et al. (2004, p. 438) dizem que nem toda equação diferencial de segunda ordem pode ser resolvida integrando diretamente duas vezes. Quando a gente tiver lidando com o sistema massa mola, teremos uma força da mola (elástica), uma força de resistência, uma constante de elasticidade e uma constante de amortecimento. Daí, tomando a segunda lei de Newton:

$$F_{ext} = mu'' + \varphi u' + ku. \tag{4.8}$$

Na equação 4.8 o m é a inércia, o φ amortecimento e o k é a rigidez da mola (constante de elasticidade). A rigidez da mola é dada pela seguinte expressão:

$$K = \frac{mg}{L}, \tag{4.9}$$

em que L é o alongamento da mola.

No Sistema Massa-Mola teremos dois tipos de oscilações: oscilações livres e oscilações forçadas. No primeiro caso, a força externa (F_{ext}) é zero. Daí,

$$mu'' + \varphi u' + ku = 0. \tag{4.10}$$

A equação característica que descreve a equação 4.10 é da seguinte forma:

$$mt^2 + \varphi t + k = 0. \tag{4.11}$$

Há outras duas situações que devemos considerar para oscilações livres: 1º caso - a constante de amortecimento igual a zero, ou seja, $\varphi = 0$. 2º caso - $\varphi \neq 0$. Assim, para o primeiro caso a equação deve ser da seguinte forma:

$$mu'' + ku = 0 \tag{4.12}$$

e para o segundo:

$$mu'' + \varphi u' + ku = 0, \tag{4.13}$$

com $\varphi \neq 0$.

Vejamos a seguir uma resolução de um problema envolvendo um Sistema-Massa Mola de oscilação livre.

Exemplo 4.2. *Em um sistema-massa mola, com uma massa de* $1Kg$ *e uma mola com constante de elasticidade igual a* $1N/m$ *é colocado um movimento, no instante* $t = 0$*, em um meio no qual a constante de amortecimento é igual a* $2N.s/m$*, determine a posição da massa em um certo instante t, tomando a posição inicial* u_0 *e a velocidade inicial* u'_0.

Solução: Trata-se de um sistema de oscilação livre, pois não temos nenhuma força externa atuando. Assim, $F_{ext} = 0$, $u(0) = u_0$, $\varphi = 0$, $u'(0) = u'_0$, $m = 1Kg$ e $K = 3$. Substituindo esses dados na equação 4.8, temos

$$1u'' + 2u' + 3u = 0, \tag{4.14}$$

que pode ser comparada com a equação característica 4.11, resulta:

$$t^2 + 2t + 3 = 0. \tag{4.15}$$

Vejamos algumas informações pertinentes:

(i) Se $\Delta > 0$, temos super amortecimento;

(ii) Se $\Delta = 0$, temos amortecimento crítico;

(iii) Se $\Delta < 0$, temos subamortecimento.

Resolvendo a equação 4.15 obtemos $\Delta = -8$ e assim, neste exemplo, teremos um subamortecimento, ou seja, há uma pequena força de amortecimento atuando no sistema. Então,

$$t = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}i}{2}. \tag{4.16}$$

Assim, a solução da equação diferencial que descreve esse sistema massa mola, pelo Teorema 2.3, será,

$$u = e^{-t}\left(c_1 \cos\sqrt{2}t + c_2 \sin\sqrt{2}t\right). \tag{4.17}$$

Se $t = 0$, então $u = u_0$. Daí, $u(0) = c_1$, $x = 0$ e $u' = u'_0$. Logo,

$$u' = e^{-t}c_1\left(-\cos\sqrt{2}t - \sqrt{2}\sin\sqrt{2}t\right) + c_2e^{-t}\left(-\sin\sqrt{2}t + \sqrt{2}\cos\sqrt{2}t\right). \tag{4.18}$$

Então,

$$u'(0) = e^{-t}c_1(-1) + c_2\left(\sqrt{2}\right) = -e^{-t}c_1 + \sqrt{2}c_2 \tag{4.19}$$

e assim,

$$c_2 = \frac{\sqrt{2}\,(u'(0) + e^{-t}u_0)}{2}. \tag{4.20}$$

Daí, a solução particular será da seguinte forma:

$$u = e^{-t}\left(u_0 \cos\sqrt{2}t + \frac{\sqrt{2}\,(u'(0) + e^{-t}u_0)}{2}\sin\sqrt{2}t\right). \tag{4.21}$$

4.3 Movimento vertical

Segundo Hughes-Hallett et al. (2004, p. 438), quando um corpo se move livremente sob a ação da gravidade, a aceleração é dada por:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g, \tag{4.22}$$

onde s é a altura do corpo em relação ao solo no instante t e g é a aceleração da gravidade. Para resolver esta equação diferencial, integramos uma vez a equação 4.22 para obter a velocidade $v = ds/dt$, ou seja:

$$\frac{ds}{dt} = -gt + v_0, \tag{4.23}$$

onde v_0 é a velocidade inicial. Integrando a equação 4.23, obtemos:

$$s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0, \tag{4.24}$$

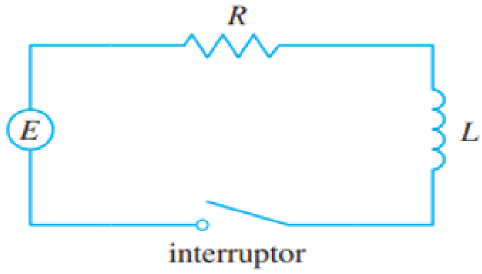
onde s_0 é a altura inicial.

A equação diferencial 4.22 é de segunda ordem, pois a maior derivada é de ordem dois. Para obtermos a solução particular dessa equação, deve-se encontrar os parâmetros v_0 e s_0 resolvendo, respectivamente, as equações 4.23 e 4.24. De posse da equação particular, pode-se obter a posição do corpo em função do tempo t.

4.4 Circuitos elétricos

Stewart (2013, p. 591), diz que um circuito elétrico simples contém uma força eletromotriz (geralmente uma pilha ou gerador) que produz uma voltagem de $E(t)$ $volts(V)$ e uma corrente de $I(t)$ amperès (A) em um tempo t. O circuito também possui um resistor com resistência de R ohms (Ω) e um indutor com indutância de L henrys (H). Veja a ilustração na figura a seguir:

Figura 2 – Circuito Elétrico Simples



Fonte: Stewart (2013).

A Lei de Ohm diz que a queda na voltagem por causa do resistor é RI. A queda de voltagem por causa do indutor é $L\frac{dI}{dt}$. Uma das Leis de Kirchhoff diz que a soma das quedas de voltagem é igual à voltagem fornecida $E(t)$ (STEWART, 2013, p. 591). Isso nos permite escrever:

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t), \tag{4.25}$$

que é uma Equação Diferencial de Primeira Ordem que modela a corrente I no instante t.

Exemplo 4.3. *Encontre uma expressão para a corrente em um circuito onde a resistência é 12 Ω , a indutância é 4 H, a pilha fornece uma voltagem constante de 60 V e o interruptor é ligado quando* $t = 0$*. Qual o valor-limite da corrente?*

Solução: Substituindo os valores de $L = 4$, $R = 12$ e $E(t) = 60$, na equação 4.25, temos:

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60, \tag{4.26}$$

ou seja,

$$\frac{dI}{dt} = 15 - 3I \tag{4.27}$$

e o problema de valor inicial é

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} = 15 - 3i \\ I(0) = 0 \end{cases} . \tag{4.28}$$

A equação diferencial 4.28 é separável, logo pode ser resolvida da seguinte maneira:

$$\int \frac{dI}{15 - 3I} = \int dt, \tag{4.29}$$

com $15 - 3i \neq 0$. Assim,

$$-\frac{1}{3}\ln|15 - 3I| = t + C \rightarrow |15 - 3I| = e^{-3(t+C)} \tag{4.30}$$

e

$$I = \frac{Ae^{-3t} - 15}{3}, \tag{4.31}$$

com C e A constantes. Substituindo $I(0) = 0$ na equação 4.31, encontramos o valor da constante, ou seja, $A = 15$. Logo, a solução particular da equação diferencial 4.27 é:

$$I = 5 - 5e^{-3t} \tag{4.32}$$

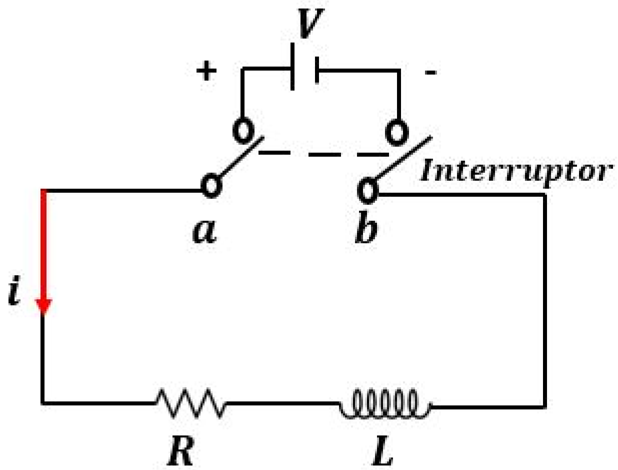
e a corrente-limite, em ampère, é:

$$\lim_{t \mapsto \infty} I(t) = \lim_{t \mapsto \infty} (5 - 5e^{-3t}) = 5. \tag{4.33}$$

4.5 Fluxo de corrente elétrica

Segundo Thomas et al. (2002), a figura 3 representa um circuito elétrico cuja resistência total constante é de R ohms e cuja auto-indutância, indicada como uma espiral, é L henries, também constante. Há uma chave cujos terminais em a e b, que podem ser fechados para se conectar a uma fonte elétrica constante de V volts.

Figura 3 – Circuito *RL*



Fonte: Thomas et al. (2002).

Adaptando a lei de Ohm, $V = RI$, para esse circuito, temos:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V, \tag{4.34}$$

onde i é a intensidade de corrente em ampères e t é o tempo dado em segundos.

Exemplo 4.4. *A chave do circuito RL é fechada no tempo $t = 0$. Como a corrente vai fluir em função do tempo?*

Solução: A equação diferencial 4.34 pode ser escrita na forma:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{V}{L} \tag{4.35}$$

e de acordo com o Teorema 2.1, dado que $i = 0$ quando $t = 0$, sua solução será:

$$i = \frac{V}{R} - \frac{V}{R}e^{-\frac{R}{L}t}. \tag{4.36}$$

4.6 Pêndulo simples

Segundo Zill e Cullen (2001), o deslocamento angular de um pêndulo simples é descrito pela equação não-linear de segunda ordem:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0, \tag{4.37}$$

em que l é o comprimento da haste do pêndulo. Para pequenas oscilações, $\sin\theta$ é substituído por θ. A equação diferencial resultante:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0 \tag{4.38}$$

mostra que o pêndulo apresenta movimento harmônico simples. Uma análise da solução da equação 4.38 mostra que o período de pequenas oscilações é dado pela fórmula familiar da física:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2}}. \tag{4.39}$$

4.7 Conclusão

Como podemos perceber, os conceitos e definições de equações diferencias aparecem com grande frequência na modelagem de fenômenos físicos. A abordagem dos problemas físicos e suas soluções por meio de equações diferenciais, devem ser consideradas pelo professor em sala de aula e ter como objetivos, atrair a atenção e aprimorar o entendimento dos discentes em relação aos conteúdos que são trabalhados nas disciplinas de cálculo diferencial.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, foram apresentadas diversas aplicações de equações diferencias em física. As aplicações foram retiradas dos principais livros de cálculo utilizados nos cursos de graduação e tiveram por objetivo mostrar que é possível inseri-las no contexto da sala de aula e em consequência disso, nortear os alunos na busca da aprendizagem significativa.

É importante destacar que no ensino de matemática, de certo modo, há uma carência quanto à inserção de aplicações e contextualização dos conteúdos, mesmo quando o cenário assim o exige. Isso se deve a diversos fatores, que vão desde o número reduzido de aulas - o que pode ocasionar uma má formação quanto à base dos alunos -, até mesmo à ausência de ferramentas adequadas à disposição dos docentes.

Por outro lado, poderia-se levantar a questão de que não cabe ao curso de licenciatura em matemática dar tanta importância as aplicações, mas sim a outros ramos como a física, a química e etc. No entanto, sabe-se do grau de dificuldades dos alunos quanto à abstração dos conteúdos de matemática quando estes não estão associados à situações-problemas. Dado essa problemática, muitas vezes resta aos alunos apenas “decorar” umas e outras fórmulas, mesmo sem saber sua real aplicação. Corroborando com o que foi mencionado, Conceição e Almeida (2015) dizem que:

> as demandas impostas pela sociedade atual contribuem para o aumento da necessidade do conhecimento matemático. Contudo, a maneira como vem sendo transmitido diminui o interesse do aluno por seu conhecimento aprofundado. Assim, ele perde a ideia do que realmente é a Matemática quando não se valoriza a sua presença associada a situações diversas do seu cotidiano.

Em suma, práticas que têm como finalidade a melhora na qualidade do ensino de matemática são necessárias e como tais carecem de ser introduzidas com certa emergência.

REFERÊNCIAS

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. **Cálculo**. Porto Alegre: Bookman Editora, 2014.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática:** uma nova estratégia. São Paulo: Editora Contexto, 2002.

BIEMBENGUT, M. S.; NELSON, H. **Modelagem matemática no ensino**. São Paulo: Editora Contexto, 2000.

BOYCE, W.; DIPRIMA, R. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2011.

CADEMI, L. **O Saber não tem preço. Aplicações de Equações Diferenciais de Primeira Ordem**. 2016. Disponível em: <https://lusoacademia.org/2016/02/17/aplicacao-das-equacoes-diferenciais-de-primeira-ordem/>. Acesso em: 15 de maio de 2022.

CONCEIÇÃO, F. H. G.; ALMEIDA, M. J. de M. Situações-problema como ferramenta metodológica para o ensino de matemática na educação de jovens e adultos. **Revista Científica da FASETE**, p. 81, 2015.

CUNHA, C. P. A importância da matemática no cotidiano. **Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento**. Edição 04, v. 1, p. 641–650, 2017.

DOMENICO, C. N. B. D. **Notas de aula sobre Equações Diferencias Ordinárias**. 2021. Disponível em: <https://www.passeidireto.com/arquivo/90998601/notas-de-aula-1>. Acesso em: 26 de maio de 2022.

FERNANDES, D. d. S.; SALDANHA, G. **Dificuldades de Aprendizagem no Nível Superior: estudo de caso com graduandos de licenciatura em química**. ENALIC, 2014.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo**. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2008.

HUGHES-HALLETT, D. et al. **Cálculo de uma variável**. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2004.

MACHADO, I. M. F. **Matemática aplicada:** o uso das equações diferenciais ordinárias em modelos matemáticos de sistemas físicos e bio-químicos. 2016. Disponível em: <http://200.17.56.16/attachments/article/1704/TCC%20-%20Ivana%20Maria%20Fernandes%20Machado.pdf>. Acesso em: 23 de maio de 2022.

MIGUEL, A. **História na Educação Matemática:** propostas e desafios. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2004.

SIMÕES, C. A. E. **Equações diferenciais na física**. Dissertação (Mestrado). Universidade de Évora, 2014.

SODRÉ, U. **Notas de aula sobre Modelos Matemáticos (Universidade Estadual de Londrina)**. 2007. Disponível em: <http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/pdfs/modelos.pdf>. Acesso em: 20 de maio de 2022.

STEWART, J. **Cálculo**. São Paulo: Editora Cengage Learning, 2013.

THOMAS, G. B. et al. **Cálculo**. São Paulo: Addison Wesley, 2002.

WIKIPÉDIA. **Sudário de Turim**. 2022. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Sud%C3%A1rio_de_Turim&oldid=62950126>. Acesso em: 23 de maio de 2022.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Equações Diferenciais**. São Paulo: Pearson Education, 2001.